数学〔前期Ａ方式（1/29）〕

I(1)

$0.25 \leqq \frac{m}{38-m} < 0.35$ (m：自然数，m と $38-m$ は互いに素)

$\frac{1}{4} \leqq \frac{m}{38-m} < \frac{7}{20}$

$\frac{20}{7} < \frac{38-m}{m} \leqq 4$

$\frac{20}{7} < \frac{38}{m} - 1 \leqq 4$

$\frac{27}{7} < \frac{38}{m} \leqq 5$

$\frac{1}{5} \leqq \frac{m}{38} < \frac{7}{27}$

$\frac{38}{5} \leqq m < \frac{266}{27}$

これを満たす m は 8 と 9 である。
m と $38-m$ は互いに素なので，$m=9$

したがって，求める分数は，$\frac{9}{29}$

I(2)

支払いに使う 10 円玉，100 円玉，500 円玉の個数をそれぞれ x，y，z とすると，
x，y，z は 0 以上の整数で，
$10x+100y+500z=1400$，すなわち $x+10y+50z=140$ となる。
これを変形して，$50z=140-(x+10y) \leqq 140$

よって，$z \leqq \frac{14}{5}$となり，z は 0 以上の整数なので，$z=0$，1，2 となる。

$z=0$ のとき，$x+10y=140$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は，
(0, 14), (10, 13), (20, 12), ⋯, (140, 0)の 15 通り。
$z=1$ のとき，$x+10y=90$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は，
(0, 9), (10, 8), (20, 7), ⋯, (90, 0)の 10 通り。
$z=2$ のとき，$x+10y=40$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は，
(0, 4), (10, 3), (20, 2), (30, 1), (40, 0)の 5 通り。

これらは同時には起こらないので，求める場合の数は 15＋10＋5＝30 通り。

I(3)①

△PQG の各辺の長さを求める。

$\mathrm{CP}=\frac{1}{3}\mathrm{BC}=2a$，$\mathrm{CG}=6a$ より，$\mathrm{PG}=\sqrt{(2a)^2+(6a)^2}=2\sqrt{10}a$

$\mathrm{CQ}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=3a$，$\mathrm{CG}=6a$ より，$\mathrm{QG}=\sqrt{(3a)^2+(6a)^2}=3\sqrt{5}a$

$\mathrm{CP}=2a$，$\mathrm{CQ}=3a$ より，$\mathrm{PQ}=\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}=\sqrt{13}a$

△PQG に余弦定理を用いて，$\cos\angle\mathrm{PGQ}=\frac{(2\sqrt{10}a)^2+(3\sqrt{5}a)^2-(\sqrt{13}a)^2}{2\cdot 2\sqrt{10}a\cdot 3\sqrt{5}a}=\frac{72}{60\sqrt{2}}=\frac{3}{5}\sqrt{2}$

$\sin\angle\mathrm{PGQ}>0$ より，$\sin\angle\mathrm{PGQ}=\sqrt{1-(\frac{3}{5}\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{5}$

$\triangle\mathrm{PQG}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PG}\cdot\mathrm{QG}\cdot\sin\angle\mathrm{PGQ}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}a\cdot 3\sqrt{5}a\cdot\frac{\sqrt{7}}{5}=3\sqrt{14}a^2$

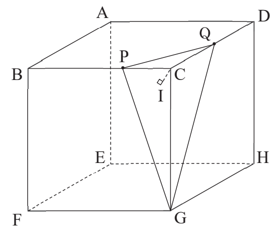
I(3)②

四面体 CPQG の体積は，△CPQ を底面として，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2a\times 3a\times 6a=6a^3$となる。

また，△PQG を底面として，$\frac{1}{3}\times 3\sqrt{14}a^2\times\mathrm{CI}=\sqrt{14}a^2\cdot\mathrm{CI}$ となる。

よって，$6a^3=\sqrt{14}a^2\cdot\mathrm{CI}$

$\mathrm{CI}=\frac{6a}{\sqrt{14}}=\frac{3}{7}\sqrt{14}a$



II(1)

$f(x)=x^2-2tx+2x+4t-3=x^2-2(t-1)x+4t-3$
$=\{x-(t-1)\}^2-(t-1)^2+4t-3=\{x-(t-1)\}^2-t^2+6t-4$
頂点の座標は，$(t-1,\ -t^2+6t-4)$

II(2)

軸の方程式は $x=t-1$ である。この軸と x の変域 $-1 \leqq x \leqq 3$ との位置関係により
場合分けをする。
(i) $t-1 \leqq -1$ すなわち $t \leqq 0$ のとき
$x=-1$ で $f(x)$は最小となるので，
$m(t)=f(-1)=(-1)^2-2t(-1)+2(-1)+4t-3=6t-4$

(ii) $-1 \leqq t-1 \leqq 3$ すなわち $0 \leqq t \leqq 4$ のとき
$x=t-1$ で $f(x)$は最小となるので，
$m(t)=f(t-1)=-t^2+6t-4$

(iii) $3 \leqq t-1$ すなわち $4 \leqq t$ のとき
$x=3$ で $f(x)$は最小となるので，
$m(t)=f(3)=3^2-2t\cdot 3+2\cdot 3+4t-3=-2t+12$

II(3)

$m(t)=3$ なので，

(i)$t \leqq 0$ のとき，$6t-4=3$ より，$t=\frac{7}{6}$　　$t \leqq 0$ より，$t=\frac{7}{6}$ は不適

(ii) $0 \leqq t \leqq 4$ のとき，$-t^2+6t-4=3$ より，$t^2-6t+7=0$

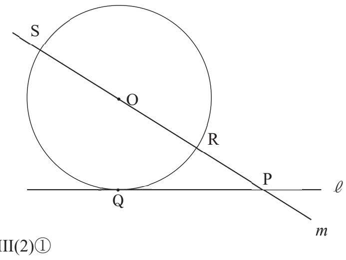
$t=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}=3\pm\sqrt{2}$　　$0 \leqq t \leqq 4$ より，$t=3-\sqrt{2}$は適，$t=3+\sqrt{2}$は不適

(iii) $4 \leqq t$ のとき，$-2t+12=3$ より，$t=\frac{9}{2}$　　$4 \leqq t$ より，$t=\frac{9}{2}$ は適

したがって，$m(t)=3$ となる t は，$3-\sqrt{2}$ と $\frac{9}{2}$ である。

III(1)

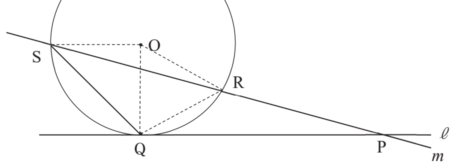
方べきの定理より，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}$
$(\sqrt{3}r)^2=r\cdot\mathrm{PS}$
$\mathrm{PS}=3r$ となる。
したがって，$\mathrm{RS}=2r$(直径)となるため，3 点 R, O, S は一直線上にある。
よって，直線 m は円 O の中心を通る。



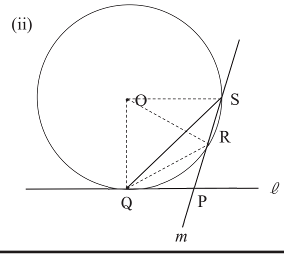
III(2)①

$\mathrm{QS}=\sqrt{2}r$, $\mathrm{OQ}=\mathrm{OS}=r$ より，$\angle\mathrm{QOS}=90°$である。
このとき，次の 2 つの場合が考えられる。

(i)



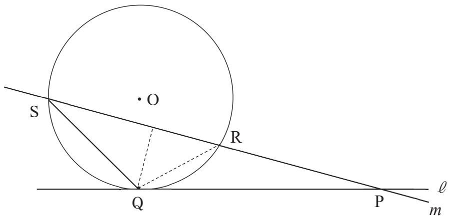
(ii)



数学〔前期Ｂ方式（１/30）〕

(i)の場合，円周角の定理より∠QRS＝45°である。
QR＝r であるので，△OQR は正三角形となり，∠QOR＝60°である。
接弦の定理より∠QSR＝∠PQR＝30°である。
∠PQR＋∠RPQ＝∠QRS より，∠RPQ＝15°となる。
(ii)の場合， QR＝r であるので，△OQR は正三角形となり，∠QOR＝60°である。
∠SOR＝30°であるので，∠OSR＝75°である。
∠RPQ は∠OSR の外角に等しいので，∠RPQ＝105°となる
したがって，∠RPQ＜90°より，∠RPQ＝15°である。

III(2)②
PR＝RS＝QS・cos∠QSR＋QR・cos∠QRS
$=\sqrt{2}r\cdot\cos30°+r\cdot\cos45°$
$=\frac{\sqrt{6}r}{2}+\frac{\sqrt{2}r}{2}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})r}{2}$



III(2)③

△PQR において，$\mathrm{PR}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})r}{2}$，QR＝$r$，∠RQP＝30°，∠RPQ＝15°である。

正弦定理より，$\frac{\mathrm{QR}}{\sin15°}=\frac{\mathrm{PR}}{\sin30°}$ となり，$\sin15°=\frac{r}{2}\cdot\frac{2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})r}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

I(1)

$2\leqq x\leqq y\leqq z$ であるので，$\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{x}$・・・①

よって，$\frac{5}{3}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\leqq\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{6}{x}$

すなわち，$\frac{5}{3}\leqq\frac{6}{x}$，ゆえに $x\leqq\frac{18}{5}=3.6$

x は 2 以上の自然数であるから，$x=2$，3
(i)$x=2$ のとき

$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{7}{6}$・・・②

$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\leqq\frac{2}{y}+\frac{3}{y}=\frac{5}{y}$ より，$\frac{7}{6}\leqq\frac{5}{y}$，ゆえに $y\leqq\frac{30}{7}=4.2\cdots$

y は自然数で，$2=x\leqq y$ であるから，$y=2$，3，4

$y=2$ のとき，②より，$\frac{3}{z}=\frac{1}{6}$，よって $z=18$ となり，これは①に適する。

$y=3$ のとき，②より，$\frac{3}{z}=\frac{1}{2}$，よって $z=6$ となり，これは①に適する。

$y=4$ のとき，②より，$\frac{3}{z}=\frac{2}{3}$，これを満たす自然数 z はない。

(ii)$x=3$ のとき

$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{4}{3}$・・・③

$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\leqq\frac{2}{y}+\frac{3}{y}=\frac{5}{y}$ より，$\frac{4}{3}\leqq\frac{5}{y}$，ゆえに $y\leqq\frac{15}{4}=3.75$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから，$y=3$

このとき，③より，$\frac{3}{z}=\frac{2}{3}$，これを満たす自然数 z はない。

以上から，$(x, y, z)=(2, 2, 18)$，$(2, 3, 6)$

I(2)①
空室ができてもよいとすれば，3 部屋 A，B，C に 5 頭を分ける方法は，$3^5=243$ 通り。
空室が 2 部屋できるのは，3 通り(残りの部屋に 5 頭全部入れる)。
空室が 1 部屋できるのは，空室の選び方が 3 通りあり，それぞれについて残り 2 部屋に 5 頭を入れる方法が $2^5-2=30$ 通りずつあるので，3×30＝90 通り。
よって，243－3－90＝150 通り。

I(2)②
成牛 5 頭を，どの部屋にも 1 頭以上になるよう分ける方法は上で求めた 150 通り。そのそれぞれについて，子牛 3 頭を部屋 A，B，C に分ける方法が $3^3=27$ 通りあるので，求める場合の数は，150 × 27 = 4050 通り。

I(3)

$y=-x^2-ax+a^2=-\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a^2$ より，軸 $x=-\frac{a}{2}$ と区間 $0\leqq x\leqq 1$ との位置関係から，

(i)$1<-\frac{a}{2}$，すなわち $a<-2$ のとき，$x=1$ で，最大値は a^2-a-1

(ii)$0<-\frac{a}{2}\leqq1$，すなわち $-2\leqq a<0$ のとき，$x=-\frac{a}{2}$ で，最大値は $\frac{5}{4}a^2$

(iii) $-\frac{a}{2}\leqq0$，すなわち $0\leqq a$ のとき，$x=0$ で，最大値は a^2

II(1)

辺 BC の中点を E，辺 CD の中点を F とすると，$\mathrm{EF}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}=3a$

AP：PE＝AQ：QF＝2：1 より，$\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}\mathrm{EF}=2a$

II(2)
PQ と同様に考えると，PR，QR，PS，QS，RS の長さもすべて $2a$ となるため，四面体 PQRS は 1 辺が $2a$ の正四面体である。
したがって，正四面体の各面は 1 辺が $2a$ の正三角形である。
底面を△PQR と考えると，底面の面積は，

$\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2a\cdot\sin60°=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a^2$

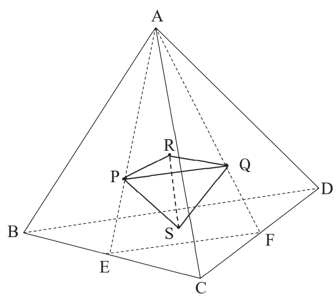
S から底面 PQR に垂線 SH を下ろすと，H は△PQR の重心となる。
QR の中点を N とすると，

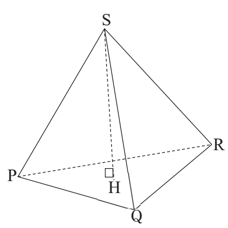
$\mathrm{NP}=\sqrt{3}a$ より，$\mathrm{PH}=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$

$\mathrm{SH}=\sqrt{\mathrm{PS}^2-\mathrm{PH}^2}=\sqrt{(2a)^2-(\frac{2}{3}\sqrt{3}a)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}a$

よって，四面体 PQRS の体積は，

$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}a^2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}a=\frac{2}{3}\sqrt{2}a^3$





数学〔前期Ｂ方式（１/30）〕

III(1)

$-x^2+4x=x^2-2ax+a^2-4$

$2x^2-2(a+2)x+a^2-4=0$

判別式を D とすると，2 つの放物線が異なる 2 つの共有点をもつのは $D>0$

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-2\cdot(a^2-4)=-a^2+4a+12>0$

$(a-6)(a+2)<0$

$-2<a<6$

III(2)

2 つの放物線の共有点の x 座標は，$2x^2-2(a+2)x+a^2-4=0$ の解である。

$\alpha+\beta=a+2$，$\alpha\beta=\frac{a^2-4}{2}$，$\beta-\alpha=\sqrt{L}$

$S=\int_\alpha^\beta(-2x^2+2ax+4x-a^2+4)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+(a+2)x^2-(a^2-4)x\right]_\alpha^\beta$

$=-\frac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+(a+2)(\beta^2-\alpha^2)-(a^2-4)(\beta-\alpha)$

$=(\beta-\alpha)\left\{-\frac{2}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+(a+2)(\beta+\alpha)-(a^2-4)\right\}$

$=(\beta-\alpha)\left\{-\frac{2}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+(\beta+\alpha)^2-2\alpha\beta\right\}$

$=(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{3}(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}L\sqrt{L}$

III(3)

面積 S が最大となるのは，Lが最大となるときである。

$2x^2-2(a+2)x+a^2-4=0$ より，

$\beta=\frac{a+2+\sqrt{-a^2+4a+12}}{2}$，$\alpha=\frac{a+2-\sqrt{-a^2+4a+12}}{2}$（ただし，$-2<a<6$）

$\beta-\alpha=\sqrt{L}=\sqrt{-a^2+4a+12}$

$L=-a^2+4a+12=-(a-2)^2+16$ より，$a=2$ のとき，最大値 16 となる。

これは，$-2<a<6$ を満たす。

したがって，S の最大値は，$\frac{1}{3}\cdot16\sqrt{16}=\frac{64}{3}$

数学〔中期（２/16）〕

設問		解答例
I	ア	5
	イ	6
	ウ	2
	エ	7
	オ	3
	カ	1
	キ	3
	ク	2
	ケ	2
	コ	3
	サ	8
	シ	6
	スセ	15
	ソ	2
	タ	4
	チ	2
	ツテ	45
	トナ	10
	ニヌネノ	1110
	ハヒフ	132
	ヘホ	11
	あい	02
	う	2
	え	2
	お	7
	か	9
	き	7
	く	4
	けこ	23
	さ	8
	し	3
	す	2
	せ	3
	そ	3
	たちつ	120
	てと	90
	な	1
	にぬ	36
	ね	5
	のは	12
	ひ	3
	ふへ	20

設問		解答例
II	ア	8
	イ	4
	ウ	3
	エ	7
	オ	7
	カ	3
	キ	3
	ク	6
	ケ	3
	コ	2
	サ	3
	シ	3
	ス セ	60
	ソ	4
	タ	3
	チ	3
	ツ	6
	テ	4
	ト ナ	21
	ニ	2
	ヌ	3
	ネ	3
	ノ	2
	ハ	3
	ヒ	3
III	ア	4
	イ	2
	ウ	1
	エ	2
	オ	6
	カ	8
	キ	4
	ク ケ	20
	コ	6
	サ	0
	シ ス	10
	セ	0
	ソ タ	36
	チ ツ	52
	テ ト	16
	ナ ニ	10
	ヌ	8
	ネ ノ	31
	ハ	8
	ヒ	5
	フ	3
	ヘ ホ	11

数学〔前期A方式 1/29〕

Ⅰ

⑴　求める既約分数は、自然数 m を用いて$\dfrac{m}{38-m}$と表せる。$0.25 \leqq \dfrac{m}{38-m} < 0.35$を満たす m は、$m=8$、9

m と$38-m$ は互いに素であるから、$m=9$ である。したがって、求める分数は、$\dfrac{9}{38-9}=\dfrac{9}{29}$

⑵　10円玉、100円玉、500円玉の枚数をそれぞれ x(枚)、y(枚)、z(枚)とおくと、$10x+100y+500z=1400$

これを変形して、$50z=140-(x+10y) \leqq 140$より、$z \leqq \dfrac{14}{5}$

これを満たす z は、$z=0$、1、2 であり、それぞれの値について条件を満たす x、y の組を求める。

⑶　①　△PQG の各辺の長さを求めて、余弦定理を用いる。cos∠PGQ より、sin∠PGQ を求める。

②　四面体 CPQG の体積を、△CPQ を底面と見ると、$6a^3$ である。また、△PQG を底面と見ると、高さは CI であるから、①で求めた面積を用いて CI を求める。

Ⅱ

⑴　$f(x)=x^2-2tx+2x+4t-3=\{x-(t-1)\}^2-t^2+6t-4$ より、頂点の座標は、$(t-1,\ -t^2+6t-4)$

⑵　軸の x 座標は $x=t-1$ である。x の変域 $-1 \leqq x \leqq 3$ との位置関係で場合分けをする。

(ⅰ)　$t-1 \leqq -1$、すなわち $t \leqq 0$ のとき、$x=-1$ で $f(x)$は最小となるから、$m(t)=f(-1)=6t-4$

(ⅱ)　$-1 \leqq t-1 \leqq 3$、すなわち $0 \leqq t \leqq 4$ のとき、$x=t-1$ で $f(x)$は最小となるから、$m(t)=f(t-1)=-t2+6t-4$

(ⅲ)　$3 \leqq t-1$、すなわち $4 \leqq t$ のとき、$x=3$ で $f(x)$は最小となるから、$m(t)=f(3)=-2t+12$

⑶　⑵のそれぞれの場合で $m(t)=3$ となる t を求める。

(ⅰ)　$t \leqq 0$ のとき、$6t-4=3$ より、$t=\dfrac{7}{6}$　　$t \leqq 0$ より、$t=\dfrac{7}{6}$は不適。

(ⅱ)　$0 \leqq t \leqq 4$ のとき、$-t^2+6t-4=3$ より、$t=3\pm\sqrt{2}$　　$0 \leqq t \leqq 4$ より、$t=3+\sqrt{2}$ は不適、$t=3-\sqrt{2}$ は適している。

(ⅲ)　$4 \leqq t$ のとき、$-2t+12=3$ より、$t=\dfrac{9}{2}$　　$4 \leqq t$ より、$t=\dfrac{9}{2}$ は適している。

Ⅲ

⑴　方べきの定理より、$PQ^2=PR \times PS$ であるから、$PR=r$、$PQ=\sqrt{3}r$ より、$PS=3r$

したがって、$RS=PS-PR=2r$ となる。これは円Oの直径と等しいから、直線 m は円Oの中心を通る。

⑵　①　$QS=\sqrt{2}r$、$OQ=OS=r$ より、$\angle QOS=90^\circ$

このとき、(ⅰ)直線 m が OQ を通る場合と、(ⅱ) 直線 m が OQ を通らない場合がある。それぞれの場合で、∠RPQ を求めると、(ⅰ)の場合、$\angle RPQ=15^\circ$、(ⅱ)の場合、$\angle RPQ=105^\circ$ である。$\angle RPQ < 90^\circ$ より、$\angle RPQ=15^\circ$ である。

②　PR の長さは、PR＝RS と$\angle QSR=30^\circ$、$\angle QRS=45^\circ$ より求められる。

③　△PQR において、正弦定理より、$\dfrac{QR}{\sin 15^\circ}=\dfrac{PR}{\sin 30^\circ}$が成り立つ。

数学〔前期B方式 1/30〕

Ⅰ

⑴　$2 \leqq x \leqq y \leqq z$ より、$\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}$ である。$\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z} \leqq \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{6}{x}$ より、$\dfrac{5}{3} \leqq \dfrac{6}{x}$ だから、$x \leqq \dfrac{18}{5}=3.6$

x は 2 以上の自然数だから、$x=2$、3 である。$x=2$ の場合と $x=3$ の場合について、条件を満たす y と z の組をそれぞれ求める。

⑵　①　空き部屋があってもよい場合、3 部屋に 5 頭を分ける方法は$35=243$通りである。そのうち、空き部屋が 2 部屋になるのは 3 通り、空き部屋が 1 部屋になるのは90通りである。よって、$243-3-90=150$通り。

②　①で求めた150通りそれぞれについて、子牛 3 頭を 3 部屋に分ける方法が$33=27$通りある。よって、$150 \times 27=4050$通り。

⑶　$y=-x^2-ax+a^2=-(x+\dfrac{a}{2})^2+\dfrac{5}{4}a^2$ より、軸の方程式は $x=-\dfrac{a}{2}$ である。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ との位置関係で場合分けをする。

(ⅰ)　$1 < -\dfrac{a}{2}$、すなわち $a < -2$ のとき、$x=1$ で最大値となり、その値は a^2-a-1

(ⅱ)　$0 < -\dfrac{a}{2} \leqq 1$、すなわち $-2 \leqq a < 0$ のとき、$x=-\dfrac{a}{2}$で最大値となり、その値は$\dfrac{5}{4}a^2$

(ⅲ)　$-\dfrac{a}{2} \leqq 0$、すなわち $0 \leqq a$ のとき、$x=0$ で最大値となり、その値は a^2

Ⅱ

⑴　BC の中点を E、CD の中点を F とすると、AP：PE＝AQ：QF＝2：1より、$PQ=\dfrac{2}{3}EF$ となる。

⑵　PQ と同様に考えると、四面体 PQRS の各辺の長さは、すべて $2a$ である。すなわち、PQRS は正四面体であり、各面は 1 辺の長さが $2a$ の正三角形である。△PQR を底面と見て、S から△PQR に垂線 SH を下ろすと、H は△PQR の重心となる。△PQR が正三角形であることと、△PSH が直角三角形であることを利用して SH を求める。

Ⅲ

(1)　2つの放物線の式より、$-x^2+4x=x^2-2ax+a^2-4$

整理して、$2x^2-2(a+2)x+a^2-4=0$

判別式を D とすると、2つの放物線が異なる2つの共有点をもつのは、$D>0$ のときである。

(2)　異なる2つの共有点の x 座標 α と β は、$2x^2-2(a+2)x+a^2-4=0$ の解である。ここで、解と係数の関係より、$\alpha+\beta=a+2$、

$\alpha\beta=\dfrac{a^2-4}{2}$ である。2つの放物線で囲まれた部分の面積 S は、$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-2x^2+2ax+4x-a^2+4)\,dx$

この式を整理し、$\beta-\alpha=\sqrt{L}$ を代入すると、$S=\dfrac{1}{3}L\sqrt{L}$

(3)　S が最大となるのは、L が最大となるときである。$2x^2-2(a+2)x+a^2-4=0$ を解いて、α、β を求め、$\beta-\alpha=\sqrt{L}$ に代入すると、$\sqrt{L}=\sqrt{-a^2+4a+12}$

$L=-a^2+4a+12$ が最大になる a は $a=2$ であるから、このときの S の値を求めればよい。

数学〔中期　2/16〕

Ⅰ

〔1〕(1)　$\dfrac{3}{3-\sqrt{6}}=3+\sqrt{6}$　　$2<\sqrt{6}<3$ だから、$a=5$、$b=\sqrt{6}-2$

(2)　$x\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき、$|3x-1|=-3x+1$、$|3x-2|=-3x+2$ である。

(3)　絶対値記号の中身の正負に注意する。

〔2〕(1)　一の位の数が5である約数の個数を求めるには、5に奇数をかけた約数が何通りあるかを求める。

(2)　4進法のまま計算する場合、$1_{(4)}+3_{(4)}=10_{(4)}$、$11_{(4)}-3_{(4)}=2_{(4)}$ であることに注意する。

(3)　$0.1_{(4)}=0.25_{(10)}$、$0.01_{(4)}=0.0625_{(10)}$ である。

〔3〕(1)　グラフCの式より、$y=-(x-2a)^2+2a^2-7a+9$

(2)　$2a^2-7a+9=2\left(a-\dfrac{7}{4}\right)^2+\dfrac{23}{8}$ より、Cの頂点の y 座標が最小となる a の値は、$\dfrac{7}{4}$、そのときの y 座標は、$\dfrac{23}{8}$

(3)　$2a=2a^2-7a+9$ より、$a=\dfrac{3}{2}$、3　　それぞれの値を C の式に代入し、比較する。

〔4〕(1)　2個だけが同じ目である場合、残り1個のさいころの目は5通りである。

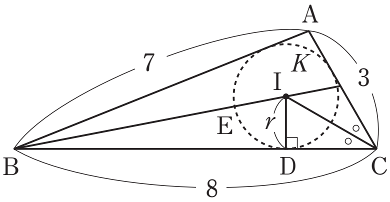
(2)　3個のさいころの目の出方は、$6^3=216$ 通りである。(i)、(ii)の場合の数から、それぞれの確率を求める。

(3)　得点が1点であり、大のさいころの出た目が奇数で、中小のさいころの出た目がともに偶数である確率は、$\dfrac{3\times3\times2}{216}=\dfrac{1}{12}$

Ⅱ

(1)　内接円 K の半径 r は、K の中心をIとすると、

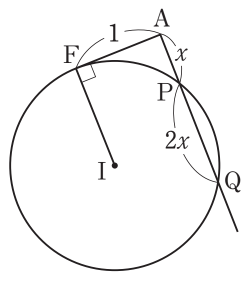
△ABC＝△ABI＋△BCI＋△CAI であることから求める。



(2)　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times BC\times AC\times\sin\angle BCA$ より、∠BCA を求める。また、線分 CI は、∠BCA を二等分する。

(3)　△DCI より、DC の長さを求める。BD＝BC－DC より、BD の長さを求め、△BDI に着目する。

(4)　K と辺 AC の接点をFとし、△AQF で方べきの定理を用いる。



Ⅲ

(1)　$BP^2+CP^2=BC^2$ より、△BCP は直角三角形である。よって、点Pの軌跡は、BC を直径とする円である。

(2)　2つの円は x 軸に関して対称だから、2つの交点は x 軸上にある。

(3)　(i)　$(x-12)^2+y^2=k$ とおくと、これは点$(12,0)$を中心とする半径$\sqrt{k}$ の円である。この円が領域Qと共有点をもつときの、k の最大値と最小値を求める。

(ii)　$\dfrac{y}{x}=k$ とおくと、$y=kx$ である。これは、原点を通る傾き k の直線である。