数学〔前期Ａ方式(１/29)〕

I (1)

$yz^2-y^2z+2xyz-xy^2+x^2y-x^2z-xz^2$
$=(y-z)x^2-(y^2-2yz+z^2)x-(y-z)yz$
$=(y-z)x^2-(y-z)^2x-(y-z)yz$
$=(y-z)\{x^2-(y-z)x-yz\}$
$=(x-y)(y-z)(z+x)$

I (2)

人数を x 人とする。1 人 4 個ずつ配ると 17 個余るので，トラのぬいぐるみは$(4x+17)$個ある。1 人 7 個ずつにすると$(x-1)$人には 7 個ずつ配ることができ，残ったトラのぬいぐるみが 1 個以上 3 個以下になるということなので，これを不等式で表すと，

$1\leqq 4x+17-7(x-1)\leqq 3$

整理して，$1\leqq -3x+24\leqq 3$

各辺から 24 を引いて，$-23\leqq -3x\leqq -21$

各辺を-3 で割って，$7\leqq x\leqq \frac{23}{3}$

ここで x は自然数なので $x=7$ となり，求める人数は 7 人。また，トラのぬいぐるみは $4\times 7+17=45$(個)。

I (3)

x，y を 0 以上の整数とする。

1 段飛ばし(2 段)で上る回数を x 回, 2 段飛ばし(3 段)で上る回数を y 回とすると，

$2x+3y=15$・・・①

$2x\geqq 0$ より，$15-3y\geqq 0$，すなわち $y\leqq 5$

y は 0 以上の整数であるので，$y=0$，1，2，3，4，5

これを①に代入し，x も整数になる組は,

$(x,\ y)=(6,\ 1)$，$(3,\ 3)$，$(0,\ 5)$

2 段 6 回と 3 段 1 回で上る方法は，${}_7C_1=7$　7 通り

2 段 3 回と 3 段 3 回で上る方法は，${}_6C_3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$　20 通り

3 段 5 回で上る方法は，1 通り

よって，上り方は全部で $7+20+1=28$ より，28 通り

II

(1) $x^2-4x+3=x+a$ より，$x^2-5x+3-a=0$

判別式 $D=25-4(3-a)=0$ のとき接するので，　$a=-\frac{13}{4}$

$x^2-5x+3+\frac{13}{4}=0$ より，$4x^2-20x+25=0$

$(2x-5)^2=0$ より，$x=\frac{5}{2}$，$y=\frac{5}{2}-\frac{13}{4}=-\frac{3}{4}$

よって，点 A の座標は $(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4})$

(2) $x^2-4x+3=x+b$ より，$x^2-5x+3-b=0$

したがって，$x=\frac{5\pm\sqrt{13+4b}}{2}$

$y=x+b$ より，$y=\frac{5+2b\pm\sqrt{13+4b}}{2}$

点 B の座標は $\left(\frac{5-\sqrt{13+4b}}{2},\ \frac{5+2b-\sqrt{13+4b}}{2}\right)$, 点 C の座標は $\left(\frac{5+\sqrt{13+4b}}{2},\ \frac{5+2b+\sqrt{13+4b}}{2}\right)$

(3)点 B の y 座標が 3 であるので，$f(x)=x^2-4x+3=3$

$x(x-4)=0$ より，$x=0$，4 となり，点 B は$(0, 3)$か$(4, 3)$である。

また，点 B は $y=x+b$ 上にあるので,

$(0, 3)$のとき，$3=0+b$ より，$b=3$ となる。

$(4, 3)$ のとき，$3=4+b$ より，$b=-1$ となる。

$b>0$ を満たすのは，$b=3$

$x=\frac{5}{2}$と $y=x+3$ の交点を D,

$y=3$ との交点を E とする。

$x=5$ と $y=3$ の交点を F とする。

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

$=AD\times BE\times\frac{1}{2}+AD\times EF\times\frac{1}{2}$

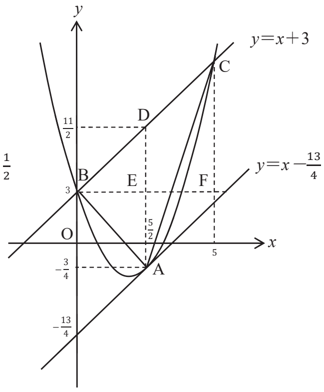
$=AD\times(BE+EF)\times\frac{1}{2}=AD\times BF\times\frac{1}{2}$

点 D の座標は$(x,\ y)=\left(\frac{5}{2},\ \frac{11}{2}\right)$より，

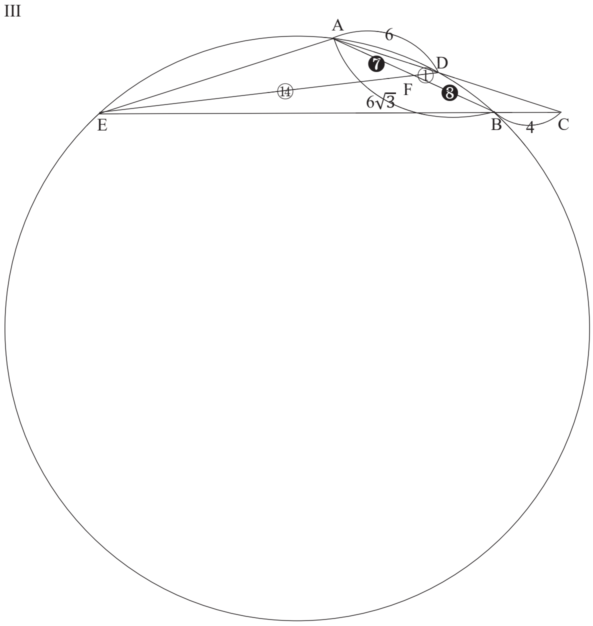
$AD=\frac{11}{2}-(-\frac{3}{4})=\frac{25}{4}$

$BF=5-0=5$

$\triangle ABC$ の面積$=\frac{25}{4}\times 5\times\frac{1}{2}=\frac{125}{8}$



III



(1) 余弦定理より，$AC^2=BA^2+BC^2-2\cdot BA\cdot BC\cdot\cos 150^\circ$

$$=(6\sqrt{3})^2+4^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=196$$

$AC>0$ より，$AC=\sqrt{196}=14$

$CD=AC-AD=14-6=8$

方べきの定理より，$CA\cdot CD=CE\cdot CB$

$14\cdot 8=CE\cdot 4$

$CE=28$，よって，$BE=CE-CB=28-4=24$

(2) メネラウスの定理より，$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CD}{DA}=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{24}{28}\cdot\frac{8}{6}=\frac{8}{7}\times\frac{AF}{FB}=1$

よって，$BF=\frac{8}{7}AF$

したがって，$BF=\frac{8}{15}AB=\frac{8}{15}\times 6\sqrt{3}=\frac{16\sqrt{3}}{5}$

(3) $\angle ABC=150^\circ$より，$\angle EBF=30^\circ$となるので,

$S_1=\frac{1}{2}EB\cdot BF\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot\frac{16\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{96\sqrt{3}}{5}$

(4) AF : FB$=7:8$ より，$S_2:S_1=7:8$ となるので，$S_2=\frac{7}{8}S_1$

また，メネラウスの定理より，$\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EF}{FD}\cdot\frac{DA}{AC}=\frac{4}{24}\cdot\frac{EF}{FD}\cdot\frac{6}{14}=\frac{1}{14}\times\frac{EF}{FD}=1$

よって，$EF=14FD$

EF : FD$=14:1$ より，$S_1:S_3=14:1$ となるので，$S_3=\frac{1}{14}S_1$

よって，$\frac{S_2}{S_3}=\frac{\frac{7}{8}S_1}{\frac{1}{14}S_1}=\frac{49}{4}$

数学〔前期A方式(1/30)〕

I (1)

$x=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{x}=\frac{2}{3-\sqrt{5}}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$

I (2)

$1_{(3)}-0.21_{(3)}=0.02_{(3)}$

$0.02_{(3)}=0\times 3^0+0\times\frac{1}{3^1}+2\times\frac{1}{3^2}$

$=0\times 9^0+2\times\frac{1}{9^1}$なので，$0.2_{(9)}$である。

I (3)

①千の位が 1〜6 の 6 通り。百，十，一の位は残った 6 個の順列になるので，
$6\times{}_6P_3=6\cdot6\cdot5\cdot4=720$ より，720 個

②一の位が 0 の場合は，千，百，十の位は，1〜6 の中から 3 個を並べる順列なので，${}_6P_3=120$ より，120 個。
一の位が 2 または 4 または 6 の場合は，一の位が 3 通り。千の位は残った 6 個から 0 以外の 5 通り。百，十の位は残った 5 個の順列になるので，
$5\cdot{}_5P_2\cdot3=5\cdot5\cdot4\cdot3=300$ より，300 個。
したがって，$120+300=420$ より，420 個。

③余事象で考える。
千の位が 1 の場合は，百，十，一の位は残った 6 個の順列になるので，
$1\cdot{}_6P_3=1\cdot6\cdot5\cdot4=120$ より，120 個。
千の位が 2 の場合は，百の位が 0，十の位が 1 のみであり，一の位は 3〜6 の 4 通り。
したがって，$720-(120+4)=596$ より，596 個。

II

(1) $y=3x^2-2kx+1=3\left(x-\frac{k}{3}\right)^2+1-\frac{k^2}{3}$なので，

軸の方程式は，$x=\frac{k}{3}$ である。

(2) $1-\frac{k^2}{3}<0$ のとき，$y=f(x)$のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

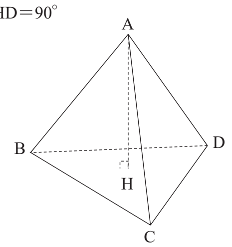
k について解くと，$k<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<k$ となる。

k は自然数なので，求める最小値は，$k=2$ になる。

(3) $k\geqq2$ のとき，$f(x)<0$ を満たす実数 x が存在する。
① $k=2$ のとき，
$f(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$となり，$f(x)<0$ を満たす x の値の範囲は，
$\frac{1}{3}<x<1$となる。この範囲に整数は含まれないので，$k=2$ は不適。
② $k=3$ のとき，
$f(x)=3x^2-6x+1$ となり，軸は $x=1$ である。
このとき，$f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，$f(2)=1>0$ となり，$x=1$ だけが，$f(x)<0$ をみたす整数となる。
③ $k\geqq4$ のとき，
$f(1)=4-2k<0$，$f(2)=13-4k<0$ となり，$f(x)<0$ をみたす整数が複数存在するため，不適。
以上より，$k=3$ になる。

III

(1) △ABH，△ACH，△ADH において，AH は共通。
正四面体なので，AB＝AC＝AD
AH は垂線なので，∠AHB＝∠AHC＝∠AHD＝90°
したがって，△ABH≡△ACH≡△ADH
よって，BH＝CH＝DH となるので，
点 H は△BCD の外心である。



(2) △BCD は正三角形であるから，点 H は△BCD の重心である。
CD の中点を M とすると，点 H は線分 BM を 2 : 1 に内分する。

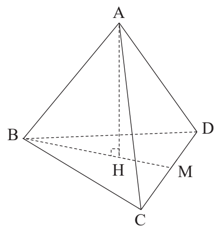
$\mathrm{BM}=2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a$ なので，$\mathrm{BH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$ より，$4a^2=\frac{12}{9}a^2+\mathrm{AH}^2$

$\mathrm{AH}^2=\frac{8}{3}a^2$ なので，$\mathrm{AH}>0$ より，$\mathrm{AH}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

$\triangle\mathrm{BCD}=2a\times2a\sin60^\circ\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}a^2$

正四面体 ABCD$=\sqrt{3}a^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}a\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$



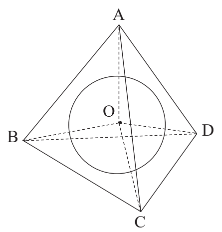
(3)正四面体 ABCD を三角錐 OABC, 三角錐 OBCD, 三角錐 OCDA, 三角錐 ODAB の 4 つに分割する。
三角錐 OABC，三角錐 OBCD，三角錐 OCDA，三角錐 ODAB の底面は合同な正三角形であり，高さは内接球の半径 r である。
したがって，三角錐 OABC＝三角錐 OBCD＝三角錐 OCDA＝三角錐 ODAB

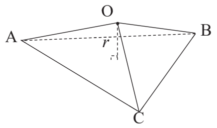
三角錐 OABC$=\sqrt{3}a^2\times r\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}a^2r}{3}$

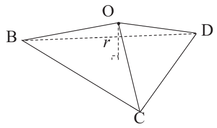
正四面体 ABCD＝三角錐 OABC×4 なので，

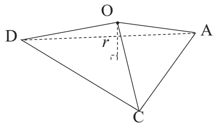
$\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{4\sqrt{3}a^2r}{3}$

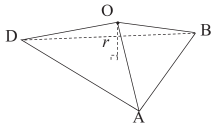
$r=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{6}a$











数学〔前期Ｂ方式(１/31)〕

設問		解答例
I	ア	2
	イ	2
	ウ	8
	エ	2
	オ	7
	カ	2
	キ	4
	クケ	19
	コ	6
	サシ	31
	ス	9
	セ	5
	ソ	4
	タ	7
	チツ	64
	テト	13
	ナ	1
	ニ	5
	ヌ	2
	ネ	5
	ノ	4
	ハ	3
	ヒ	5
	フ	3
	ヘ	2
	ホ	0
	あ	7
	い	3
	う	3
	えお	14
	か	3
	きく	14
	けこ	17
	さし	28
	す	9
	せそ	17
II	ア	1
	イ	2
	ウエ	10
	オ	3
	カ	3
	キ	2
	クケ	91
	コ	6
	サ	9
	シ	3
	ス	4
	セ	1
	ソ	3
II	タ	8
	チツ	91
	テ	7
	トナ	30
	ニ	3
	ヌネ	15
	ノ	3
	ハヒ	26
III	ア	2
	イ	2
	ウ	7
	エ	2
	オ	3
	カ	1
	キ	2
	ク	3
	ケ	2
	コ	1
	サシ	−1
	ス	2
	セ	3
	ソ	4
	タチ	−4
	ツ	3
	テ	2
	ト	2
	ナ	3
	ニ	3
	ヌ	5
	ネ	6
	ノ	3
	ハ	5
	ヒフ	18
	ヘ	5
	ホ	9

数学〔前期A方式 1/29〕

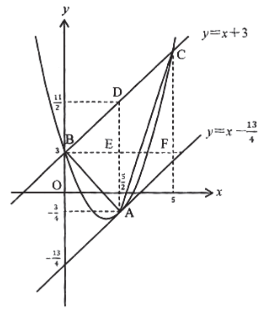
Ⅰ

(1) 与式$=(y-z)x^2-(y^2-2yz+z^2)x-(y-z)yz=(y-z)x^2-(y-z)^2x-(y-z)yz=(y-z)\{x^2-(y-z)x-yz\}=(x-y)(y-z)(z+x)$

(2) 人数をx人として、ぬいぐるみの個数の関係を不等式で表すと$1\leqq 4x+17-7(x-1)\leqq 3$となる。

(3) 1段飛ばしでx回、2段飛ばしでy回上るとすると、$2x+3y=15$と表せるから、x、yがともに整数である組は、$(0,\ 5)$、$(3,\ 3)$、$(6,\ 1)$である。それぞれの上り方は、$(0,\ 5)$のとき1通り、$(3,\ 3)$のとき${}_6C_3=20$(通り)、$(6,\ 1)$のとき${}_7C_1=7$(通り)である。

Ⅱ



(1) $x^2-4x+3=x+a$より$x^2-5x+3-a=0$　　判別式$D=25-4(3-a)=0$のとき接するから、

$a=-\dfrac{13}{4}$である。$x^2-5x+3+\dfrac{13}{4}=0$より、$x=\dfrac{5}{2}$、$y=\dfrac{5}{2}-\dfrac{13}{4}=-\dfrac{3}{4}$

(2) $x^2-4x+3=x+b$より$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13+4b}}{2}$、$y=x+b$より$y=\dfrac{5+2b\pm\sqrt{13+4b}}{2}$

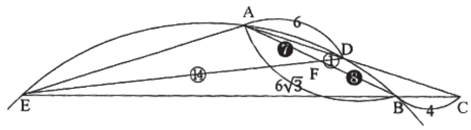
よって、点Bの座標は$\left(\dfrac{5-\sqrt{13+4b}}{2},\ \dfrac{5+2b-\sqrt{13+4b}}{2}\right)$、点Cの座標は$\left(\dfrac{5+\sqrt{13+4b}}{2},\ \dfrac{5+2b+\sqrt{13+4b}}{2}\right)$

(3) $f(x)=x^2-4x+3=3$より点Bの座標を求めると$(0,\ 3)$か$(4,\ 3)$である。点Bは$y=x+b$上にあるから、$(0,\ 3)$のとき$b=3$、$(4,\ 3)$のとき$b=-1$である。$b>0$であるから$b=3$

$x=\dfrac{5}{2}$と$y=x+3$の交点をD、$y=3$との交点をEとする。$x=5$と$y=3$の交点をFとする。

点Dの座標は$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$であるから、$\mathrm{AD}=\dfrac{25}{4}$である。また、$\mathrm{BF}=5$であるから、$\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{AD}\times\mathrm{BF}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{25}{4}\times 5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{125}{8}$

Ⅲ



(1) 余弦定理より$\mathrm{AC}=14$、方べきの定理より$\mathrm{CA}\times\mathrm{CD}=\mathrm{CE}\times\mathrm{CB}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$において、メネラウスの定理より$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}=1$

(3) $\angle\mathrm{EBF}=30^\circ$であるから、$S_1=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{EB}\times\mathrm{BF}\times\sin 30^\circ$

(4) $\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=7:8$より$S_2:S_1=7:8$である。また、$\triangle\mathrm{CDE}$において、メネラウスの定理より$\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AC}}=1$

$\mathrm{DF}:\mathrm{EF}=1:14$であるから、$S_3:S_1=1:14$　　よって、$\dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{7}{8}S_1\div\dfrac{1}{14}S_1=\dfrac{49}{4}$

数学〔前期A方式 1/30〕

Ⅰ

(1) $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$、$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}\times\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$である。$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$、$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2$と変形する。

(2) xの値は$1_{(3)}-0.21_{(3)}=0.02_{(3)}$である。$0.02_{(3)}=0\times 3^0+0\times\dfrac{1}{3^1}+2\times\dfrac{1}{3^2}=2\times\dfrac{1}{9^1}$であるから、$x$を九進法で表すと$0.2_{(9)}$である。

(3) ①千の位は1～6の6通りである。百、十、一の位は残り6個の順列であるから、$6\times{}_6P_3=720$(個)

②一の位が0の場合、${}_6P_3=120$(個)。一の位が2、4、6の場合、千の位は0以外の5通りであるから、$5\times{}_5P_2\times 3=300$(個)。

③2022以下の整数が何個あるかを求める。千の位が1の場合、百、十、一の位は残り6個の順列であるから、${}_6P_3=120$(個)。千の位が2の場合、百の位が0、十の位が1、一の位が3～6であるから4(個)。よって、2022より大きい整数は$720-(120+4)=596$(個)。

Ⅱ

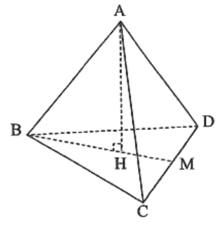
(2) グラフの頂点は$\left(\dfrac{k}{3},\ 1-\dfrac{k^2}{3}\right)$である。$1-\dfrac{k^2}{3}<0$より、$k<-\sqrt{3}$、$\sqrt{3}<k$　　kは自然数であるから、kの最小値は2

(3) $k\geqq 2$のとき、$f(x)<0$を満たす実数xが存在する。$k=2$のとき、$f(x)<0$を満たすxの値の範囲は$\dfrac{1}{3}<x<1$となるから$k=2$は不適。

$k=3$のとき、軸は$x=1$である。$f(0)=1>0$、$f(1)=-2<0$、$f(2)=1>0$となるから、$x=1$だけが$f(x)<0$を満たす整数となる。

$k\geqq 4$のとき、$f(1)=4-2k<0$、$f(2)=13-4k<0$となり、$f(x)<0$を満たす整数が複数存在するから$k\geqq 4$は不適。

Ⅲ



(1) $\triangle\mathrm{ABH}\equiv\triangle\mathrm{ACH}\equiv\triangle\mathrm{ADH}$より、$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$であることを示せばよい。

(2) $\triangle\mathrm{BCD}$は正三角形であるから、点Hは$\triangle\mathrm{BCD}$の重心である。また、$\triangle\mathrm{BCD}=\sqrt{3}a^2$である。

CDの中点をMとすると、点Hは線分BMを2：1に内分するから、$\mathrm{BH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$より、$\mathrm{AH}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$である。求める体積は$\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}a^2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

(3) 正四面体ABCDを高さが等しい4つの三角錐に分割して考える。これらの三角錐の高さは

内接球の半径rであるから、1つの三角錐の体積は$\sqrt{3}a^2\times r\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}a^2r}{3}$である。よって、$\dfrac{\sqrt{3}a^2r}{3}\times 4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$より、$r=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

数学〔前期Ｂ方式 1/31〕

Ⅰ

〔１〕 ⑵ $f(x)=-x^2+6x-2=0$ より、$x=3\pm\sqrt{7}$ であるから、Ａの座標は$(3-\sqrt{7},\ 0)$、Ｂの座標は$(3+\sqrt{7},\ 0)$である。

⑶ $a^2+2a-8>0$ ……①、$f(0)=2a-8<0$ ……②、軸について $a>0$ ……③　①、②、③より $2<a<4$

⑷ $2<a<3$ のとき、$M=f(a)$、$m=f(0)$ である。$M-m=a^2=10$ より $a=\pm\sqrt{10}$ であるから、$2<a<3$ より不適。

$3\leqq a<4$ のとき、$M=f(3)$、$m=f(0)$ である。$M-m=6a-9=10$ より $a=\dfrac{19}{6}$ であり、これは $3\leqq a<4$ を満たす。

〔２〕 ⑵ $279x-155y=31$ ……①の両辺を31で割ると、$9x-5y=1$ ……②　$x=4$、$y=7$は②を満たし、$9\cdot4-5\cdot7=1$ ……③

②－③より、$9(x-4)-5(y-7)=0$ であり、②の整数解は $x=5k+4$、$y=9k+7$

$x+y$ が３桁の自然数であるから、$100\leqq x+y\leqq 999$より、$100\leqq 14k+11\leqq 999$

また、$xy=(5k+4)(9k+7)=5(9k^2+14k+5)+k+3$ であるから、xy が５の倍数であるとき $k+3$ は５の倍数である。

〔３〕 ⑵ $-3<x-5<3$ より、$2<x<8$ である。$1<x<5$ との共通範囲は、$2<x<5$

⑶ $(3a-1)x<(3a+1)(3a-1)$より、$a>\dfrac{1}{3}$ のとき $x<3a+1$ である。$2<x<3a+1$ を満たす x が３個だけであるとき、$5<3a+1\leqq 6$

⑷ x が p または q を満たすとき、$1<x<8$ である。また、x が r を満たすとき、$(3a-1)x<(3a+1)(3a-1)$である。

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき、$x<3a+1$ で r を満たすから $3a+1\geqq 8$ より $a\geqq\dfrac{7}{3}$、$a<\dfrac{1}{3}$ のとき、$x>3a+1$ で r を満たすから $3a+1\leqq 1$ より $a\leqq 0$

〔４〕 ⑵ 袋Ａから白玉を取り出し、袋Ｂから赤玉を２個、白玉を１個取り出す確率を求める。

⑶ (ⅰ)袋Ａから赤玉を取り出し袋Ｂから赤玉を２個取り出す場合、(ⅱ)袋Ａから赤玉を取り出し袋Ｂから赤玉を１個と白玉を1個取り出す場合、(ⅲ)袋Ａから白玉を取り出し袋Ｂから赤玉を３個取り出す場合、(ⅰ)～(ⅲ)それぞれの確率を求める。

Ⅱ

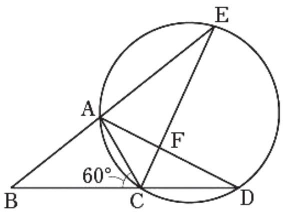
⑴ △ABC において、余弦定理より cos∠ACB を求める。△ACD において、正弦定理より AD、余弦定理より CD を順に求める。

⑵ △ABD と △BCE のそれぞれでメネラウスの定理を用いると、$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FD}}=\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FE}}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで $\mathrm{CE}=k$ とおくと $\mathrm{CF}=\dfrac{1}{4}k$、$\mathrm{FE}=\dfrac{3}{4}k$ と表せ、$\mathrm{AF}\times\mathrm{FD}=\mathrm{CF}\times\mathrm{FE}$ より $k=\dfrac{8\sqrt{91}}{7}$ である。

四角形 ACDE の面積は △ACE ＋△ CDE より、$30\sqrt{3}$である。

よって、$\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{CE}\times\sin\angle\mathrm{AFC}=30\sqrt{3}$ より $\sin\angle\mathrm{AFC}=\dfrac{15\sqrt{3}}{26}$



Ⅲ

⑵ $X=a+1$、$Y=2a-1$ とすると、$a=X-1$ より $Y=2X-3$ となるから、直線 $y=2x-3$ 上を移動する。

⑶ (ⅰ) 円C_1 の中心をＡ$(0,\ -3)$、円C_2 の中心をＢ$(3,\ 3)$とする。線分 AB の中点をＭとすると、C_1 と C_2 はＭに関して点対称であり、Ｍを通り $y=2x-3$ に垂直な直線に関して線対称である。

(ⅱ) 点Ｍを通る共通接線の方程式は、傾きを m とすると、$2mx-2y-3m=0$ である。この接線と点Ａとの距離が３であることから m を求める。

(ⅲ) 点Ｐ、Ｑが $y=2x-3$ 上にあるときに PQ の長さは最大になるから、その長さは $6+\mathrm{AB}=6+3\sqrt{5}$

(ⅳ) 求める面積は、$6\times3\sqrt{5}+3^2\pi=18\sqrt{5}+9\pi$