［解答例］

数学〔A方式(11/20)〕

設問			解答例
①	第1問	ア	3
		イ	5
		ウ	5
		エ	0
		オ	3
		カ キ ク	370
		ケ	7
		コ サ	13
		シ	2
		ス	4
		セ	2
		ソ タ チ	124
	第2問	ツ	4
		テ	3
		ト	4
		ナ ニ	27
		ヌ	7
		ネ	4
		ノ	4
		ハ	1
		ヒ	8
		フ	3
		ヘ	7
	第3問	ホ	3
		あ い	− 5
		う え	− 5
		お	3
		か き く	−21
		け	4
		こ	7
		さ	3
		し	3
②	第1問	ア	2
		イ	4
		ウ エ	− 3
		オ	6
		カ	2
		キ	3
		ク	3
		ケ	2
		コ サ	27
		シ ス	64
	第2問		3
		セ ソ	4
		タ	2
		チ	3
		ツ	7
		テ	9
		ト	5
		ナ ニ	12
		ヌ	5
		ネ	5
		ノ	4
		ハ ヒ	23
		フ	4
		ヘ	6
	第3問	ホ あ	12
		い	9
		う	5
		え	4
		お	1
		か	6
		き	3
		く け	16
		こ さ	12
		し す	13
		せ そ	12
		た	3

数学〔B方式(11/20)〕

設問			解答例
①	第1問	ア	1
		イ	7
		ウ	2
		エ	7
		オ	2
		カ	7
		キ	3
		ク	7
		ケ	3
		コ	7
		サ	1
		シ	3
	第2問	ス	4
		セ	1
		ソ タ	− 4
		チ	2
		ツ	6
		テ ト	12
		ナ ニ	− 1
		ヌ	2
		ネ	3
		ノ	3
		ハ	2
		ヒ	1
		フ	4
		ヘ	2
	第3問	ホ	4
		あ い	12
		う	8
		え	3
		お	5
		か	1
		き	5
		く	2
		け	2
		こ	6
		さ	2
		し す	10
②	第1問	ア	0
		イ	2
		ウ	3
		エ オ	− 1
		カ	2
		キ ク	− 1
		ケ コ	27
		サ	4
	第2問	シ	2
		ス	2
		セ	2
		ソ	2
		タ	4
		チ	1
		ツ	8
		テ	5
		ト	8
		ナ	3
		ニ	5
		ヌ	6
	第3問	ネ	2
		ノ	3
		ハ	1
		ヒ	3
		フ	4
		ヘ	7
		ホ	3
		あ	7
		い	3
		う	4
		え	7
		お	8
		か	4
		き	6

数学〔A方式〕

数学①

第１問

［１］ $M=49a+7b+c=81c+9b+a$ より、$b=8(3a-5c)$

b は８の倍数であるが、$0 \leqq b \leqq 6$ より $b=0$

よって、$3a=5c$ となるから、$a=5$、$c=3$

［２］⑴ $n=7x+5=13y+7$ と表せるから、$7x-13y=2$

⑵ $7x-13y=2$ ……①を満たす x、y のうちの１組は $x=4$、$y=2$ であるから、$7 \cdot 4-13 \cdot 2=2$ ……②

①、②より $7(x-4)-13(y-2)=0$

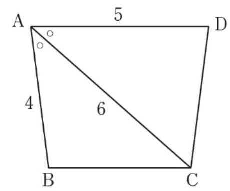
７と13は互いに素であるから、k を整数として、$x=13k+4$、$y=7k+2$

⑶ $|n-5x-3y|=12$ に $n=7x+5=91k+33$、$x=13k+4$、$y=7k+2$ を代入して整理すると

$5k+7=\pm 12$　　k は整数だから $k=1$

よって、$n=91 \cdot 1+33=124$

第２問



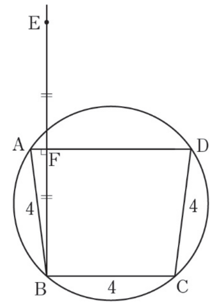
⑵ △ABC において余弦定理より、$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ より、$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$ であるから、四角形 ABCD の面積は、$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{4} \cdot 6 \cdot (5+4)=\dfrac{27\sqrt{7}}{4}$

⑶ $\cos\angle\mathrm{CAD}=\cos\angle\mathrm{BAC}$ であるから、△ACD において余弦定理より $\mathrm{CD}=4$

同様に、△ACD において余弦定理より $\cos\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{8}$



⑷ $\cos\angle\mathrm{ADC}+\cos\angle\mathrm{ABC}=0$ より、$\angle\mathrm{ADC}+\angle\mathrm{ABC}=180^\circ$ であるから

A、B、C、Dは同一円周上にある。

BE と AD の交点をFとすると、$\mathrm{BF}\perp\mathrm{AD}$ であるから

$\mathrm{AF}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAD}=4\cos\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{BE}=2\mathrm{BF}=2\sqrt{4^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=3\sqrt{7}$

第３問

⑵ 判別式 $D=(a+1)^2-4 \cdot 4<0$ より、$-5<a<3$ ……①

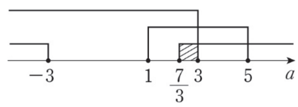
⑶ $y=f(x)=(x-a)^2-a^2+4$ より、$p=-a^2+4$

①のとき、p のとり得る値の範囲は、$-21<p \leqq 4$

⑷ $f(x)=g(x)$ より、$2x^2-(3a+1)x+8=0$

$F(x)=2x^2-(3a+1)x+8$ とおくと、$F(x)$ が実数解をもち、そのすべての解が $1 \leqq x \leqq 4$ を満たすとき

判別式 $D=(3a+1)^2-64 \geqq 0$ ……②



グラフの軸は $x=\dfrac{3a+1}{4}$ であるから、$1 \leqq \dfrac{3a+1}{4} \leqq 4$ ……③

また、$F(1) \geqq 0$ ……④、$F(4) \geqq 0$ ……⑤

②、③、④、⑤を満たす a の値の範囲は、$\dfrac{7}{3} \leqq a \leqq 3$

数学②

第１問

⑴ $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、極大値は $f(2)=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

⑵ l の方程式は、$y-(-t^3+3t^2)=(-3t^2+6t)(x-t)$ より

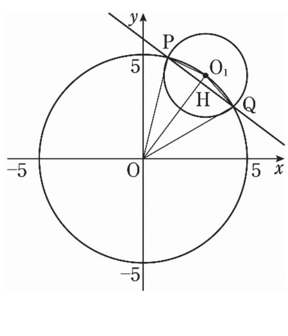
$y=(-3t^2+6t)x+2t^3-3t^2$

⑶ l が原点を通るから、$2t^3-3t^2=0$ より、$t=0$、$\dfrac{3}{2}$

l は $t=\dfrac{3}{2}$ で C と接し、このとき l の方程式は、$y=\dfrac{9}{4}x$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ において、l は $f(x)$ の上側にあるから、囲まれた部分の面積 S は

$S=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{9}{4}x-(3-x)x^2\right\}dx=\frac{27}{64}$



第２問

⑵ 円 C_1、C_2 の中心間の距離は、$\mathrm{OO_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

２円が共有点をもつための条件は、$r-2 \leqq \mathrm{OO_1} \leqq r+2$　すなわち、$3 \leqq r \leqq 7$

$r=3$ のとき C_1 と C_2 は外接し、接点は線分 $\mathrm{OO_1}$ を３：２に内分する点である。

⑶ 円 C_2 が円 C_1 の中心 $(3,\ 4)$ を通るとき、$r=\mathrm{OO_1}=5$

このとき、$C_2:x^2+y^2=25$

C_1の式と連立して、直線 PQ の方程式 $3x+4y=23$ が得られる。

OO_1と PQ の交点を H とすると、$OH=\dfrac{|-23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{23}{5}$、$O_1H=\dfrac{2}{5}$

$\triangle O_1PH$ において、$PH=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

四角形 OPO_1Q の面積は、$\left(\dfrac{1}{2}\times OO_1\times PH\right)\times 2=4\sqrt{6}$

第 3 問

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は、$a_n=3+12(n-1)=12n-9$

数列 $\{b_n\}$ の初項を b、公差を d とおくと、条件より

$3b+3d=27$、また、$3b+12d=63$

これらより $b=5$、$d=4$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{2}(3+12n-9)=6n^2-3n$

(3)　$a_nb_n=48n^2-24n-9$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=48\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-24\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-9n=16n^3+12n^2-13n$

また、$\dfrac{1}{a_nb_n}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)$ より、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_kb_k}=\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{12n+3}$

数学〔B方式〕

数学①

第1問

⑴ 和が0となるのは、1と−1、2と−2、3と−3を取り出す3通りであるから、$\dfrac{3}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$

⑵ 積が奇数となるのは、−3、−1、1、3から2枚を取り出すときであるから、$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{7}$

また、積が0となる事象の余事象は、0以外から2枚を取り出すときであるから、$1-\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{7}$

⑶ 和が負となる取り出し方は9通りである。

⑷ 和が偶数となるのは、0と−2、0と2、2と−2を取り出す3通り、または−3、−1、1、3から2枚を取り出す${}_4\mathrm{C}_2=6$通りであるから、

$\dfrac{3+6}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{7}$

よって、求める条件付き確率は、$\dfrac{1}{7}\div\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}$

第2問

⑴ $f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-4)^2+1$ であるから、

y座標は、$-\dfrac{1}{4}(a-4)^2+1$ であり、$a=4$ のとき最大値1をとる。

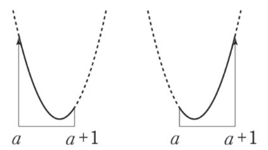
⑵ $y=f(x)$ が x 軸と異なる2点で交わる条件は、$-\dfrac{1}{4}(a-4)^2+1<0$　　これより、$a<2$、$6<a$　……①

2つの交点の x 座標は、$f(x)=0$ より、$x=\dfrac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-8a+12}\right)$

よって、$\dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-8a+12}\right)-\dfrac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-8a+12}\right)<2\sqrt{15}$　これより、$-4<a<12$　……②

①かつ②より、$-4<a<2$、$6<a<12$

⑶ $M=f(a)$ または $M=f(a+1)$ である。

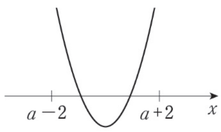


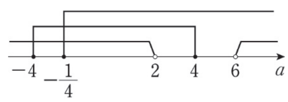
$f(a)=2a-3$、$f(a+1)=3a-2$ であるから、$f(a+1)-f(a)=a+1$

よって、$a<-1$ のとき $M=f(a)=2a-3$

$-1\leqq a$ のとき、$M=f(a+1)=3a-2$

⑷ 判別式 $D=a^2-4(2a-3)>0$　……③



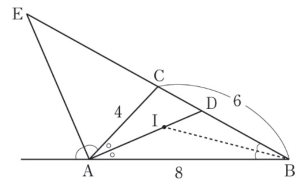


$f(x)$ の軸は $x=\dfrac{a}{2}$ であるから、$a-2\leqq\dfrac{a}{2}\leqq a+2$　……④

$f(a-2)\geqq0$　……⑤　　$f(a+2)\geqq0$　……⑥

③、④、⑤、⑥より、$-\dfrac{1}{4}\leqq a<2$

第3問



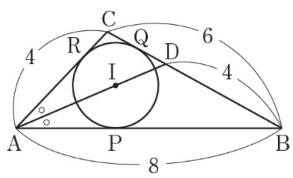
⑴ $\mathrm{BD}=6\times\dfrac{8}{8+4}=4$

また、BE：EC＝AB：AC＝2：1より、BE＝12

⑵ AP＝AR＝x とおくと、BP＝BQ＝$8-x$、CQ＝CR＝$4-x$ である。

これらの和が△ABCの周の長さになるから、$x=3$

余弦定理より、$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{7}{8}$　　$\mathrm{PQ}=\dfrac{5}{2}$



⑶ 余弦定理より、$\mathrm{AD}=2\sqrt{6}$

AE⊥AD であるから、三平方の定理より、$\mathrm{AE}=2\sqrt{10}$

数学②

第1問

⑴ $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$ であるから、$x=1$ のとき最小値0をとる。

⑵ $f(x)=g(x)$ より、$x^3-3x+1=k$　……①

$h(x)=x^3-3x+1$ とおくと、$h'(x)=3(x+1)(x-1)$

$h(x)$ の増減表は、右のようになる。

x	…	−1	…	1	…
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	3	↘	−1	↗

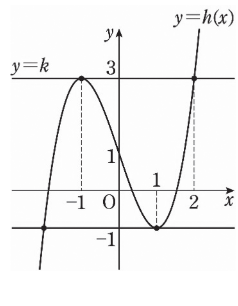
①が異なる実数解を2個だけもつのは、

$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が共有点を2個もつときであるから、$k=3$、1

⑶ $k=3$ のとき、共有点の x 座標は、$x^3-3x+1=3$ より、$x=-1$、2

2つのグラフで囲まれた図形の面積は、

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^3-x^2-x+1)\}\,dx=\frac{27}{4}$$



第2問

⑴ 2倍角の公式を用いて、

$$f(\theta)=2\sin2\theta+\frac{3}{2}(1+\cos2\theta)-\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)-1=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より、$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{9}{4}\pi$ であるから、

$f(\theta)$ が最大値をとるのは、$2\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ より、$\theta = \dfrac{1}{8}\pi$ のとき

最小値をとるのは、$2\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ より、$\theta = \dfrac{5}{8}\pi$ のとき

(3)　方程式は、$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

これを整理すると、$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より、$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{9}{4}\pi$、$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$

$2\theta + \dfrac{\pi}{4} = \theta + \dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\theta = 0$

$2\theta + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき、$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$2\theta + \dfrac{\pi}{4} = 3\pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき、$\theta = \dfrac{5}{6}\pi$

よって、3個の解をもち、最大の解は $\dfrac{5}{6}\pi$

第3問

(1)　CはABを1：2に内分するから、$\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

角の二等分線の性質より AD：DB＝OA：OB＝3：4であるから、$\overrightarrow{OD} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{OA} + \dfrac{3}{7}\overrightarrow{OB}$

(2)　Eは線分MC上にあるから、定数 k を用いて、$\overrightarrow{OE} = (1-k)\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{OC} = \dfrac{2k}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{3-k}{6}\overrightarrow{OB}$

Eは線分OD上にあるから、定数 l を用いて、$\overrightarrow{OE} = l\overrightarrow{OD} = \dfrac{4l}{7}\overrightarrow{OA} + \dfrac{3l}{7}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} \neq 0$、$\overrightarrow{OB} \neq 0$ で $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は平行ではないから、

$\dfrac{2k}{3} = \dfrac{4l}{7}$、$\dfrac{3-k}{6} = \dfrac{3l}{7}$　　$k = \dfrac{3}{4}$、$l = \dfrac{7}{8}$

よって、$\overrightarrow{ME} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{OE} = \dfrac{7}{8}\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$ であるから、$\overrightarrow{MC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

MC⊥OBのとき、$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ であることを利用して、$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$、$|\overrightarrow{OE}| = \sqrt{6}$ を順に求める。