数学〔前期A方式(1/29)〕

A1 解答例

I

(1)

$$x^2+x=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$x^2+x=\frac{1}{4}$ より $x^2=\frac{1}{4}-x$ となるのでこれを $4x^3+8x^2+7x-1$ に代入すると

$$4x^3+8x^2+7x-1=4x\left(\frac{1}{4}-x\right)+8\left(\frac{1}{4}-x\right)+7x-1$$
$$=-4x^2+1$$
$$=-4\left(\frac{1}{4}-x\right)+1$$
$$=4x$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$ の両辺を二乗して

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$
$$\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$$

よって

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\times\frac{4}{9}$$
$$=\frac{17}{9}$$

ここで，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$-1\leqq\sin\theta+\cos\theta$ となるため，

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$ である．よって

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{3}\times\left(1-\frac{4}{9}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{3}\times\frac{5}{9}$$
$$=\frac{5\sqrt{17}}{27}$$

I

(3) $x+y=1$ より，$y=1-x$．ここで $y\geqq0$ より，$1-x\geqq0$ なので $x\leqq1$.

また条件より $0\leqq x\leqq1$ である．

$xy=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ と変形できるので

この $0\leqq x\leqq1$ における最大値と最小値を求めればよい

$x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ となり，このときの $y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$x=0,1$ のとき最小値 0 となり，

$x=0$ のとき $y=1-0=1$，$x=1$ のとき $y=1-1=0$ となる．これらをまとめると

$$\begin{cases}(x,y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\text{のとき最大値}\frac{1}{4}\\(x,y)=(0,1),\ (1,0)\ \text{のとき最小値}0\end{cases}$$

II

(1) 少なくとも 1 人が当たる事象は，全員が外れている事象の余事象であるので

$$P_1=1-\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=1-\frac{14}{143}=\frac{129}{143}$$

(2) 少なくとも 2 人が当たる事象は，全員が外れているまたは 1 人だけ当たっている事象の余事象であるので

$$P_2=1-\left(\frac{14}{143}+{}_4C_1\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\right)=1-\left(\frac{14}{143}+\frac{56}{143}\right)=\frac{73}{143}$$

(3) 2 人だけ当たっている，かつ D が当たっている確率は A, B, C の誰か 1 人が当たり，かつ D が当たればよいので

$$P_3=\left({}_3C_1\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\right)\cdot\frac{4}{10}=\frac{28}{143}$$

(4) 少なくとも 1 人が当たっていて，かつ D が当たっている確率は

1 人だけ当たりで D が当たっている確率 $\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{14}{143}$

2 人だけ当たりで D が当たっている確率 $P_3=\frac{28}{143}$

3 人だけ当たりで D が当たっている確率 $\left({}_3C_2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\right)\cdot\frac{3}{10}=\frac{12}{143}$

4 人全員が当たっている確率 $\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{143}$

を合計して $\frac{55}{143}$

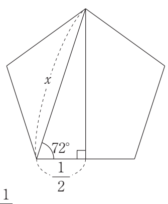
よって求める条件付き確率 $P_4=\frac{\frac{55}{143}}{P_1}=\frac{\frac{55}{143}}{\frac{129}{143}}=\frac{55}{129}$

III

(1)

$$\sin^2 72°=1-\cos^2 72°$$
$$=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$
$$=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}$$
$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$
$$=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

(2) 対角線の長さを x とし，一つの頂点から垂線を下すと次の図のようになる．



よって，$\frac{\frac{1}{2}}{x}=\cos72°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(3) 外接円の半径を R とすると

正弦定理より $\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sin72°}=2R$ だから $R=\frac{1+\sqrt{5}}{4\sin72°}$．よって

$$\text{外接円の面積}=\pi R^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4\sin72°}\right)^2\pi$$
$$=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16\sin^2 72°}\pi$$
$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{16\times\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\pi$$
$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\pi$$
$$=\frac{(6+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}\pi$$
$$=\frac{40+8\sqrt{5}}{80}\pi$$
$$=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi$$

IV

(1) $f(x)$ を展開して整理すると

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-(x+1)^2-(x+1)+c$$
$$=\frac{1}{3}x^3-(x^2+2x+1)-x-1+c$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-2+c,\ \text{よって}$$
$$f'(x)=x^2-2x-3$$
$$=(x-3)(x+1)$$

$f'(x)=0$ の解は $x=-1,\ 3$ であるので，

増減表は以下のようになる．

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{1}{3}+c$	↘	$-11+c$	↗

よって，$x=-1$ のとき極大値 $f(-1)=-\frac{1}{3}+c$,

$x=3$ のとき極小値 $f(3)=-11+c$ をとる．

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは共有点を持つので $f(x)=g(x)$．

これを移項して整理すると

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-2+c-\left(\frac{1}{3}x+c^2-4\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{10}{3}x-c^2+c+2$$
$$=0$$
$$\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{10}{3}x-c^2+c+2=0$$
$$x^3-3x^2-10x-3c^2+3c+6=0$$
$$x(x-5)(x+2)-3(c-2)(c+1)=0$$

ここで，共有点の一つの x 座標が 5 であることから，

$x(x-5)(x+2)=0$ となるため，$-3(c-2)(c+1)=0$ である．

また条件より $c<0$ であるから，$c=-1$

数学〔前期A方式(1/30)〕

Ⅳ (3) $c=-1$ のとき，

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-2-1$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-3$$
$$g(x)=\frac{1}{3}x+(-1)^2-4=\frac{1}{3}x-3$$

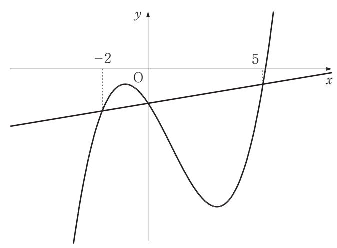
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの交点の x 座標は $f(x)=g(x)$ として，

(2)の式を利用すると

$x(x-5)(x+2)-3(-1-2)(-1+1)=x(x-5)(x+2)=0$ となるため

$x=-2,\ 0,\ 5$

これらより，$y=(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは次のようになる．



よって求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{10}{3}x\right)dx+\int_{0}^{5}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{10}{3}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2\right]_{0}^{5}$$
$$=0-\left(\frac{16}{12}+\frac{8}{3}-\frac{20}{3}\right)+\left(-\frac{625}{12}+\frac{125}{3}+\frac{125}{3}\right)-0$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{375}{12}$$
$$=\frac{407}{12}$$

A2 解答例

Ⅰ (1) $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ より，$a+b=2\sqrt{5}$，$ab=2$.

また，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(2\sqrt{5})^2-2=16$．よって

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{16}{2}=8$$
$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2-2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=8^2-2=62$$

(2) $60m+11n=2024$ より $60m=11(184-n)$

ここで，60 と 11 は互いに素であるから $184-n$ は 60 の倍数となるので，

自然数 k を用いて $184-n=60k$ と表すことができる．ただし n も自然数なので

$184-n<184$.

$k=3$ のとき，$184-n=180$ となり，$n=4$．このとき $m=33$

$k=2$ のとき，$184-n=120$ となり，$n=64$，このとき $m=22$

$k=1$ のとき，$184-n=60$ となり，$n=124$，このとき $m=11$

よって求める自然数の組は $(m,\ n)=(11,\ 124),\ (22,\ 64),\ (33,\ 4)$

(3) 三平方の定理より，$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDH}$ より，

$$\cos\angle\mathrm{BDH}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BC}-\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{DH}}{2\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\mathrm{DH}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

よって $\mathrm{DH}=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{3}{2}$ となるため

$\mathrm{AH}=\mathrm{AD}+\mathrm{DH}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$

三平方の定理より，$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$

よって $\cos\angle\mathrm{BAH}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}=\frac{4}{5}$

Ⅱ (1) 文字列は全部で ${}_6\mathrm{P}_6=6!=720$ 個あり，最後の文字列は RONGDA である．

(2) A で始まる文字列は ${}_5\mathrm{P}_5=5!=120$ 個，その次に D で始まる文字列が並ぶ．

DA で始まる文字列は ${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$ 個あり，その次に DG，DN，DO で始まる文字列が 24 個ずつ並ぶ．

その後，DRAGNO，DRAGON と続くので DRAGON は $120+24\times4+2=218$ 番目である．

(3) R で始まる文字列は ${}_5\mathrm{P}_5=5!=120$ 個であるから，O で始まる最後の文字列が $720-120=600$ 番目と分かる．

その次に続く RAD，RAG で始まる文字列がそれぞれ ${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$ 個あるので，これで $600+6\times2=612$ 個，その次の RANDGO が 613 番目なので，614 番目の文字列はその次の RANDOG である．

Ⅲ (1) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax-4a+8=-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}a^2-4a+8$ と

変形できるので，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2-4a+8\right)$ である．

頂点の x 座標 a が $5\leqq x\leqq6$ に含まれるかどうかで場合分けを行う．

(ⅰ) $a<5$ のとき，$M(a)=f(5)=-\frac{1}{2}\cdot5^2+5a-4a+8=a-\frac{9}{2}$

(ⅱ) $5\leqq a<6$ のとき，$M(a)=f(a)=\frac{1}{2}a^2-4a+8$

(ⅲ) $6\leqq a$ のとき，$M(a)=f(6)=-\frac{1}{2}\cdot6^2+6a-4a+8=2a-10$

以上まとめて

$$M(a)=\begin{cases}a-\frac{9}{2}\ (a<5\text{ のとき})\\ \frac{1}{2}a^2-4a+8\ (5\leqq a<6\text{ のとき})\\ 2a-10\ (6\leqq a\text{ のとき})\end{cases}$$

(2) (1)のそれぞれの場合について $M(a)=1$ とすると，

(ⅰ) $a<5$ のとき，$a-\frac{9}{2}=1$ より $a=\frac{11}{2}$．$a<5$ より不適.

(ⅱ) $5\leqq a<6$ のとき

$$\frac{1}{2}a^2-4a+8=1$$
$$a^2-8a+14=0$$
$$a=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot14}}{2}$$
$$=4\pm\sqrt{2},\ 5\leqq a<6\text{ より}$$
$$a=4+\sqrt{2}$$

(ⅲ) $6\leqq a$ のとき，$2a-10=1$ より $a=\frac{11}{2}$．$6\leqq a$ より不適.

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) より，$a=4+\sqrt{2}$

(3) $a=4+\sqrt{2}$ より，

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+(4+\sqrt{2})x+8-4(4+\sqrt{2})$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+(4+\sqrt{2})x-8-4\sqrt{2}$$

$f(x)=0$ として整理すると

$$x^2-2(4+\sqrt{2})x+4(4+2\sqrt{2})=0$$
$$(x-4)\{x-(4+2\sqrt{2})\}=0$$
$$x=4,\ 4+2\sqrt{2}$$

Ⅳ

(1) 初項 $a_1=2$，公比 r とする．

$r=1$ のとき，$\sum_{k=1}^{2n}a_k=2na_1=4n$，$2\sum_{k=1}^{n}a_k^2=2na_1^2=8n$ となるため不適．

$r\neq1$ のとき，$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}$，$2\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\frac{2a_1^2(1-r^{2n})}{1-r^2}$，

よって $\frac{2(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{8(1-r^{2n})}{1-r^2}$

$$\frac{2(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{8(1-r^2n)}{(1-r)(1+r)}$$

$$1=\frac{4}{1+r}$$

$$r=3$$

(2) 第 n 項 $a_n=2\cdot3^{n-1}$ が 5 桁の数になるので

$10000=10^4\leqq2\cdot3^{n-1}<100000=10^5$，常用対数をとると

$$4\leqq\log_{10}2+(n-1)\log_{10}3<5$$

$$4\leqq0.3010+0.4771(n-1)<5$$

$$3.6990\leqq0.4771(n-1)<4.6990$$

$$7.7\cdots\leqq n-1<9.8\cdots$$

$$8.7\cdots\leqq n<10.8\cdots$$

よって $n=9, 10$

(3) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$ より，

$3^n<10^{12}+1$ を満たす最大の n を求める．

ここで，両辺はともに奇数であるから右辺から 1 を引いて偶数とした

$3^n<10^{12}$ を満たせばよい．両辺の常用対数をとると

$$n\log_{10}3<12$$

$$0.4771n<12$$

$n<25.15\cdots$ よって最大の $n=25$

数学〔前期 B 方式〕

設問		解答例
Ⅰ	アイ	35
	ウエオ	105
	カ	4
	キク	60
	ケコ	28
	サ	2
	シ	4
	スセソ	116
	タ	1
	チツ	81
	テ	2
	トナ	27
	ニ	4
	ヌネ	27
	ノハ	11
	ヒフ	27
	ヘ	7
	ホあ	11
	い	1
	う	5
	え	1
	お	4
	か	2
	き	−
	く	3
	け	4
	こ	5
	さ	3
	し	7
	す	2
	せ	4
	そ	3
	た	5
	ち	2
	つ	1
	て	5
	と	2
	な	1
	に	5
	ぬ	5
	ね	5
	の	2
	は	6
	ひ	5
	ふ	2
	へ	5
	ほ	1

設問		解答例
Ⅱ	ア	2
	イ	2
	ウ	3
	エオ	−1
	カ	3
	キク	18
	ケコ	27
	サシ	15
	スセ	45
	ソ	2
	タ	8
	チツ	15
	テ	6
	ト	4
	ナ	2
	ニ	3
	ヌ	1
	ネ	2
	ノハ	12
	ヒ	2
Ⅲ	ア	1
	イ	2
	ウ	1
	エオ	−2
	カキ	16
	ク	7
	ケ	2
	コサ	25
	シ	3
	ス	2
	セ	3
	ソタ	10
	チ	3
	ツ	4
	テト	25
	ナ	9
	ニヌ	25
	ネ	9
	ノ	1

数学〔前期A方式 1/29〕

Ⅰ

(1) $x^2+x=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{1}{4}$ これを $x^2=\frac{1}{4}-x$ と変形して、$4x^3+8x^2+7x-1$ に代入する。

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$ の両辺を2乗して、$\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$ が得られる。

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{17}{9}$ $0°\leqq\theta\leqq180°$ より、$-1\leqq\sin\theta+\cos\theta$ となるため、$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$

(3) $y=1-x$ $y\geqq0$ より、$1-x\geqq0$ なので $x\leqq1$ また、条件より、$0\leqq x\leqq1$

$xy=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ と変形して、$0\leqq x\leqq1$ における最大値と最小値を求める。

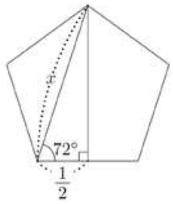
Ⅱ

(2) 1−(全員が外れる、または1人だけ当たる確率)で求める。$1-\left(\frac{14}{143}+{}_4C_1\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}\right)=\frac{73}{143}$

(3) A、B、Cのうち1人とDが当たる確率を求める。$\left({}_3C_1\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\right)\cdot\frac{4}{10}=\frac{28}{143}$

(4) Dを含む1～4人が当たる確率それぞれの合計は、$\frac{55}{143}$ 求める条件付き確率は、$\frac{55}{143}\div\frac{129}{143}=\frac{55}{129}$

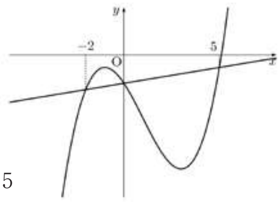
Ⅲ



(2) $\frac{\frac{1}{2}}{x}=\cos72°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(3) 外接円の半径を R とすると、正弦定理より、$R=\frac{1+\sqrt{5}}{4\sin72°}$

Ⅳ



(1) $f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ より、$x=-1$ のとき極大値、$x=3$ のとき極小値をとる。

(2) $f(x)=g(x)$ を整理すると、$x(x-5)(x+2)-3(c-2)(c+1)=0$

共有点の1つの x 座標が5であるから、$-3(c-2)(c+1)=0$ $c=-1$

(3) $c=-1$ のときのグラフの交点の x 座標は、$f(x)=g(x)$ より、$x(x-5)(x+2)=0$ $x=-2$、0、5

数学〔前期A方式 1/30〕

Ⅰ

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$、$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$、$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2-2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}$ を用いて求める。

(2) 与式より、$60m=11(184-n)$ ここで、60と11は互いに素であるから、自然数 k を用いて $184-n=60k$ と表せる。

n は自然数であるから、$k=1$、2、3のときの m、n の値を求める。

(3) △ABC、△ADC、△BDHは直角三角形である。∠ADC＝∠BDHより、cos∠ADC＝cos∠BDHであることを用いる。

Ⅱ

(2) Aで始まる文字列は ${}_5P_5=5!=120$ 個である。DA、DG、DN、DOで始まる文字列はそれぞれ ${}_4P_4=4!=24$ 個である。

その後に、DRAGNO、DRAGONと続くので、DRAGONは $120+24\times4+2=218$ 番目である。

(3) Oで始まる最後の文字列は600番目である。RAD、RAGで始める文字列はそれぞれ ${}_3P_3=3!=6$ 個である。

その後、613番目にRANDGO、614番目にRANDOGが続く。

Ⅲ

(1) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}a^2-4a+8$ と変形できるので、頂点の座標は、$\left(a、\frac{1}{2}a^2-4a+8\right)$

$a<5$ のとき $M(a)=f(5)=a-\frac{9}{2}$、$5\leqq a<6$ のとき $M(a)=f(a)=\frac{1}{2}a^2-4a+8$、$6\leqq a$ のとき $M(a)=f(6)=2a-10$

(2) $M(a)=1$ となる a の値を求めると、$a<5$ のとき $a=\frac{11}{2}$ となり不適、$5\leqq a<6$ のとき $a=4+\sqrt{2}$、$6\leqq a$ のとき $a=\frac{11}{2}$ となり不適。

(3) $f(x)$ に $a=4+\sqrt{2}$ を代入し、$f(x)=0$ として整理すると、$x^2-(8+2\sqrt{2})x+4(4+2\sqrt{2})=0$ $x=4$、$4+2\sqrt{2}$

Ⅳ

(1) 公比 $r=1$ のとき、$\sum_{k=1}^{2n}a_k=4n$、$2\sum_{k=1}^{n}a_k^2=8n$ となり不適。

$r\neq1$ のとき、$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}$、$2\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\frac{2a_1^2(1-r^{2n})}{1-r^2}$ $\frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{2a_1^2(1-r^{2n})}{1-r^2}$ より、$r=3$

(2) $a_n=2\cdot3^{n-1}$ だから、$10^4\leqq2\cdot3^{n-1}<10^5$ 常用対数をとると、$4\leqq\log_{10}2+(n-1)\log_{10}3<5$ $8.7\cdots\leqq n<10.8\cdots$ よって、$n=9$、10

(3) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$ より、$3^n<10^{12}+1$ 両辺とも奇数であるから $3^n<10^{12}$ を満たす最大の n を求めると、$n=25$

数学〔前期B方式〕

Ⅰ

〔1〕(1)　$P=525=3\cdot5^2\cdot7$、$Q=140=2^2\cdot5\cdot7$ より、$G=5\cdot7=35$

(2)　$L=pqG$ より、$pq=105$　これを満たす p、q の組は4組あり、$P+Q$ が最小となるとき、$P=60$、$Q=28$

$60x-28y=8$ を満たすのは $x=2$、$y=4$ のときである。また、$15(x-2)=7(y-4)$ となるから、$x-2=7k$、$y-4=15k$ と表せる。

〔2〕(2)　3回目までに2回赤玉を取り出し、4回目に赤玉を取り出す確率を求める。

(3)　赤玉を取り出すことを○、白玉を取り出すことを × とすると、○○××、×○○×、××○○の3通りがある。

(4)　2回以上連続して赤玉を取り出す確率は $\frac{7}{27}$、2回以上赤玉を取り出す確率は $\frac{11}{27}$、求める条件付き確率は $\frac{7}{27}\div\frac{11}{27}=\frac{7}{11}$

〔3〕(2)　$f(x)=(x-a)^2+a^2-3a-4$ と変形できる。$a^2-3a-4<0$ より、$-1<a<4$

2つの交点の x 座標は $f(x)=0$ より、$x=a\pm\sqrt{-a^2+3a+4}$　これらの差より、$L=2\sqrt{-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}}$

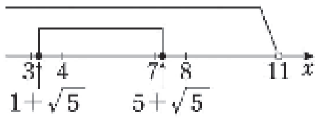
(3)　$f(a)<0$、$1<a<5$、$f(1)\geqq0$、$f(5)\geqq0$ をすべて満たすのは、$a=3$、$\frac{7}{2}\leqq a<4$

〔4〕(2)(i)　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$、$a^2-4ab+3b^2=(a-3b)(a-b)$ を用いて値を求めると、$1+\sqrt{5}\leqq x\leqq5+\sqrt{5}$

(ii)　$k=4$ のとき、$x<11$ となり、命題「$p\Rightarrow q$」は真であるが、「$q\Rightarrow p$」は偽である。

(iii)　命題「$p\Rightarrow q$」は真、「$q\Rightarrow p$」は偽となるのは、

$k>0$ では $5+\sqrt{5}<k+7$ のとき、$k<0$ では $k+7<1+\sqrt{5}$ のときである。

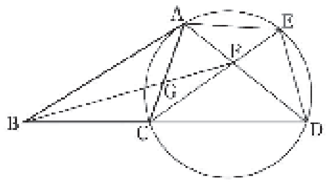


Ⅱ

(2)　方べきの定理より $AB^2=BC\cdot BD$　また、円 K は△ACD の外接円であるから、正弦定理より半径を求められる。

(3)　直線 CE は∠ACD の二等分線であり、AF：FD＝AC：CD＝2：3

また、メネラウスの定理より、$\frac{DA}{AF}\cdot\frac{FG}{GB}\cdot\frac{BC}{CD}=1$



Ⅲ

(2)　線分 AB、BC それぞれの垂直二等分線 $y=-2x+16$、$x=7$ の交点 $(7,2)$ が円 K の中心である。

(3)　$x=\frac{1\cdot2+p\cdot1}{1+2}$ 、$y=\frac{5\cdot2+q\cdot1}{1+2}$ より $p=3x-2$、$q=3y-10$　これらを $(p-7)^2+(q-2)^2=25$ に代入する。

(4)　$y=\frac{4}{3}x+k$ ……①とする。k が最大となるのは①が円 K の上側に接するとき、

k が最小となるのは①が点 Q が描く図形の下側に接するときである。