［解答例］

英語〔基礎評価型〕

設問			解答例
①	I	1	3
		2	4
		3	4
		4	4
		5	2
		6	4
		7	2
		8	3
		9	2
		10	2
	II	11	3
		12	4
		13	3
		14	2
		15	2
	III	16	4
		17	5
		18	1
		19	7
		20	4
		21	6
		22	3
		23	1
		24	3
		25	4
②	I	1	2
		2	1
		3	3
		4	4
		5	4
		6	4
		7	3
		8	3
		9	4
		10	3
	II	11	3
		12	4
		13	3
		14	1
		15	2
	III	16	1
		17	6
		18	8
		19	6
		20	5
		21	2
		22	6
		23	3
		24	1
		25	8

英語〔総合評価型〕

設問			解答例
①	I	1	3
		2	3
		3	4
		4	2
		5	3
		6	1
		7	1
		8	1
		9	2
		10	4
	II	11	4
		12	1
		13	4
		14	1
		15	1
	III	16	5
		17	8
		18	4
		19	3
		20	3
		21	5
		22	3
		23	7
		24	6
		25	8
②	I	1	4
		2	4
		3	2
		4	4
		5	2
		6	2
		7	3
		8	4
		9	1
		10	1
	II	11	1
		12	2
		13	4
		14	3
		15	4
	III	16	3
		17	1
		18	8
		19	5
		20	3
		21	6
		22	3
		23	7
		24	4
		25	5

数学〔基礎評価型〕

設問			解答例
①	第１問	ア	3
		イ	2
		ウエ	16
		オカ	92
		キク	34
	第２問	ケ	2
		コ	3
		サ	2
		シ	2
		ス	3
		セソ	−4
		タ	6
		チ	3
		ツ	4
		テ	3
		ト	2
		ナ	7
		ニ	4
	第３問	ヌ	1
		ネ	2
		ノ	1
		ハ	2
		ヒ	6
		フ	0
		ヘホあ	120
		いう	15
		え	4
		おか	16
		き	4
		くけ	16
		こ	4
		さし	44
		す	4
		せ	3
		そ	2
		た	4
		ち	3
		つ	2
②	第１問	アイ	−3
		ウ	2
		エ	4
		オ	0
		カ	3
		キ	2
		ク	2
		ケ	9
		コサ	14
		シスセ	108
	第２問	ソタ	10
		チ	1
		ツ	3
		テ	1
		ト	3
		ナ	5
		ニ	8
		ヌ	5
		ネ	2
		ノ	1
		ハ	5
		ヒ	1
		フ	2
		ヘ	7
	第３問	ホ	5
		あ	4
		いう	10
		え	5
		お	2
		か	6
		き	2
		く	5
		けこ	15
		さ	2
		し	5
		す	1
		せ	2

数学〔総合評価型〕

設問			解答例
①	第１問	ア	1
		イ	3
		ウ	3
		エ	4
		オ	8
		カキ	81
		ク	1
		ケ	2
		コサシ	175
	第２問	ス	5
		セ	6
		ソタ	11
		チ	6
		ツ	2
		テト	11
		ナ	2
		ニヌ	33
		ネ	1
		ノ	2
		ハヒ	69
		フヘ	11
		ホあ	20
	第３問	い	2
		う	3
		え	0
		お	0
		か	2
		き	0
		く	6
		け	7
		こさ	−4
		し	7
		す	0
		せ	1
		そ	2
		た	3
		ち	4
		つ	7
		て	6
②	第１問	アイ	−2
		ウ	4
		エ	5
		オ	1
		カ	7
		キ	3
		ク	1
		ケコサ	108
	第２問	シス	−6
		セソタ	105
		チツ	17
		テトナ	867
		ニ	3
		ヌ	3
		ネノ	90
		ハ	2
		ヒ	4
	第３問	フ	2
		ヘ	3
		ホ	2
		あ	2
		い	3
		う	4
		え	4
		お	3
		か	4
		き	3
		く	2
		け	3
		こさ	12
		し	3
		す	6
		せ	2

数学〔基礎評価型〕

数学①

第1問

［1］(i)「$x>2$ かつ $y>4$」のとき、$x-2>0$ かつ $y-4>0$ であるから、$(x-2)(y-4)>0$ が成り立つ。

$(x-2)(y-4)>0$ のとき、$x=y=0$ など、「$x>2$ かつ $y>4$」でない場合がある。

(ii)「$x>2$ または $y>4$」のとき、$x=3$、$y=5$ など、$(x-2)(y-4)<0$ でない場合がある。

$(x-2)(y-4)<0$ のとき、$x>2$、$y<4$ または $x<2$、$y>4$ であるから、「$x>2$ または $y>4$」が成り立つ。

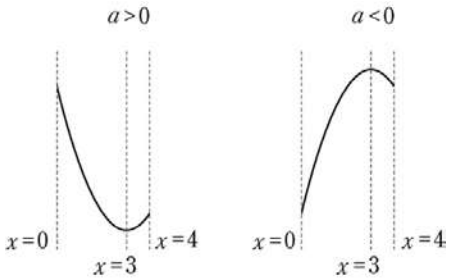
［2］(i) $a=2024=2^3\cdot11\cdot23$ であるから、a の正の約数の個数は、$(3+1)(1+1)(1+1)=16$（個）

また、$b=1932=2^2\cdot3\cdot7\cdot23$ であるから、a と b の最大公約数は、$2^2\cdot23=92$

(ii) $n(A)=16$、$n(B)=(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)=24$、$n(A\cap B)=(2+1)(1+1)=6$

よって、$n(A\cup B)=16+24-6=34$

第2問



(1) $f(x)=ax^2-6ax+b=a(x-3)^2-9a+b$

$a>0$ のとき、$f(0)=b=2$、$f(3)=-9a+b=-4$　よって、$a=\dfrac{2}{3}$

$a<0$ のとき、$f(3)=-9a+b=2$、$f(0)=b=-4$　よって、$a=-\dfrac{2}{3}$

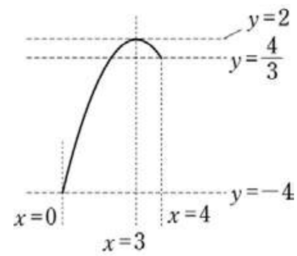
(2) $a>0$ のとき、$f(x)=\dfrac{2}{3}x^2-4x+2=0$　$x=3\pm\sqrt{6}$

$0\leqq x\leqq4$ より、$p=3-\sqrt{6}$

$a<0$ のとき、$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^2+4x-4=0$　$x=3\pm\sqrt{3}$

$0\leqq x\leqq4$ より、$q=3-\sqrt{3}$

よって、$|p-q|=|(3-\sqrt{6})-(3-\sqrt{3})|=\sqrt{6}-\sqrt{3}$



(3) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる2点で交わるときを考える。

$a<0$ のとき、$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^2+4x-4=-\dfrac{2}{3}(x-3)^2+2$

$f(4)=\dfrac{4}{3}$ であるから、k の値の範囲は、$\dfrac{4}{3}\leqq k<2$

(4) $0\leqq t\leqq2$ のとき、$f(x)$ は $t\leqq x\leqq t+1$ で増加するから、$f(t+1)-f(t)\geqq1$

$-\dfrac{2}{3}(t+1)^2+4(t+1)-4-\left(-\dfrac{2}{3}t^2+4t-4\right)\geqq1$　$0\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}$

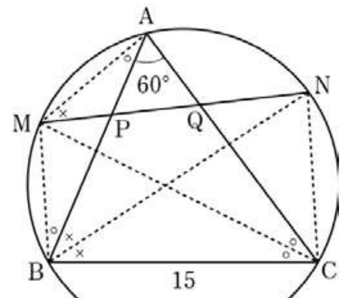
$2\leqq t\leqq3$ のとき、$f(2)=f(4)=\dfrac{4}{3}$、$f(3)=2$ であるから、$f(x)$ の最大値と最小値の差は1以上にならない。

第3問

(1) $\angle\mathrm{MPB}=\angle\mathrm{MAB}+\angle\mathrm{AMN}=\angle\mathrm{MCB}+\angle\mathrm{ABN}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACB}+\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$

(2) $\angle\mathrm{MAN}=60^\circ+\angle\mathrm{MAB}+\angle\mathrm{NAC}=60^\circ+\angle\mathrm{MAB}+\angle\mathrm{AMN}=60^\circ+\angle\mathrm{MPB}=60^\circ+60^\circ=120^\circ$

また、弧BCと弧MNは円周角が等しいので、$\mathrm{MN}=\mathrm{BC}=15$



(3) $\mathrm{MP}=4$ より、$\mathrm{PN}=15-4=11$

余弦定理より、$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{MP}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{MP}\cos120^\circ=x^2+4x+16$

同様に、$\mathrm{BM}^2=\mathrm{BP}^2+\mathrm{MP}^2-2\mathrm{BP}\cdot\mathrm{MP}\cos60^\circ=y^2-4y+16$

$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}$ であるから、$x^2+4x+16=y^2-4y+16$

$(x+y)(x-y+4)=0$　$x>0$、$y>0$ より、$x-y+4=0$　$y=x+4$　……①

また、方べきの定理より、$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=\mathrm{MP}\cdot\mathrm{PN}$ であるから、$xy=44$

①を代入して整理すると、$x^2+4x-44=0$

$x>0$ より、$x=4\sqrt{3}-2$　①に代入して、$y=4\sqrt{3}+2$

数学②

第1問

(1) $f(-2)=0$ より、$f(-2)=-8-2a+b=0$　$2a-b=-8$　……①

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=2$ より、$\displaystyle\int_0^2(x^3+ax+b)\,dx=2$　$a+b=-1$　……②

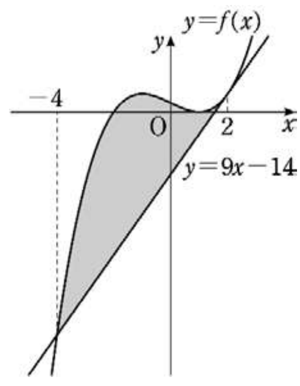
①、②より、$a=-3$、$b=2$

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

(2) $f(x)=x^3-3x+2$ より、$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ より、$x=-1$、1

$f(x)$ の増減は右の表のようになり、極大値は4、極小値は0



(3) 求める接線の方程式は、$y-(t^3-3t+2)=(3t^2-3)(x-t)$　$y=3(t^2-1)x-2t^3+2$

点A$(-2,\ 0)$ での接線の傾きは、$3\{(-2)^2-1\}=9$

接線の傾きが9となるのは、$3(t^2-1)=9$ より $t=\pm2$　$t\neq-2$ を満たすのは $t=2$

接線 l の方程式は、$y=3(2^2-1)x-2\cdot2^3+2$　$y=9x-14$

$y=f(x)$ と $y=9x-14$ の交点の x 座標は、

$x^3-3x+2=9x-14$ より、$x=2$、-4

求める面積は、$\displaystyle\int_{-4}^{2}\{x^3-3x+2-(9x-14)\}\,dx=108$

第２問

⑴　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=21$　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=21$　$25-2\vec{a}\cdot\vec{b}+16=21$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=10$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

⑵　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(p-1)\vec{a}+q\vec{b}$

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{b}$ より、$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=\{(p-1)\vec{a}+q\vec{b}\}\cdot\vec{b}=0$　$5p+8q=5$　……①

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=p\vec{a}+(q-1)\vec{b}$

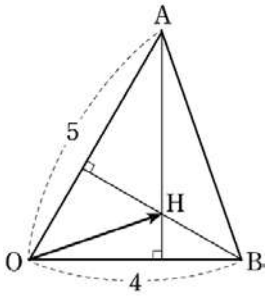
$\overrightarrow{BH}\perp\vec{a}$ より、$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=\{p\vec{a}+(q-1)\vec{b}\}\cdot\vec{a}=0$　$5p+2q=2$　……②

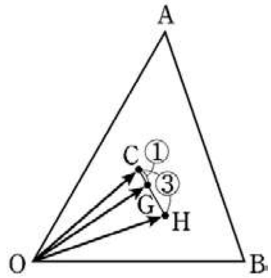
①、②より、$q=\dfrac{1}{2}$　②に代入して、$p=\dfrac{1}{5}$

⑶　点Ｃは線分 GH を１：３に外分するから、

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}}{3-1}=\dfrac{1}{2}\left\{3\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)-\left(\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\right\}=\dfrac{1}{20}(8\vec{a}+5\vec{b})$

$|\overrightarrow{OC}|^2=\left(\dfrac{1}{20}\right)^2(64|\vec{a}|^2+80\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2)=7$　$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{7}$





第３問

⑴　$x^2+y^2-10x-8y+31=0$ より、$(x-5)^2+(y-4)^2=10$

中心Ｃの座標は、(5、4)　円の半径は$\sqrt{10}$

点Ｃと直線 l の距離は、$\dfrac{|5+2\cdot4-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

⑵　$x+2y-8=0$ より、$x=8-2y$　……①

これを円の方程式に代入して整理すると、$y^2-4y+3=0$　$y=1$、3

①より、$y=1$ のとき $x=6$、$y=3$ のとき $x=2$

交点を結ぶ線分の長さは、$\sqrt{(6-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

⑶(ⅰ)　D(2、3)、E(6、1) とすると、$CD^2+CE^2=10+10=20$、$DE^2=20$

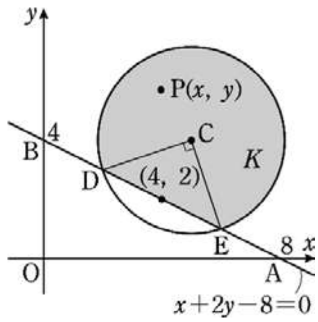
$DE^2=CD^2+CE^2$ が成り立つから、$\angle DCE=90°$

領域 K の面積は、$\dfrac{3}{4}\cdot\pi(\sqrt{10})^2+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=\dfrac{15}{2}\pi+5$

(ⅱ)　$AP^2+BP^2=(x-8)^2+(y-0)^2+(x-0)^2+(y-4)^2=2(x-4)^2+2(y-2)^2+40$

点 (4、2) は領域 K の点であり、$x=4$、$y=2$ のとき $AP^2+BP^2=40$

また、$AB^2=4^2+8^2=80$ であるから、求める最小値は $\dfrac{40}{80}=\dfrac{1}{2}$



数学〔総合評価型〕

数学①

第１問

⑴　出た目の和が３の倍数となるのは、和が３となる２通り、和が６となる５通り、和が９となる４通り、和が 12 となる１通りの、合わせて 12 通りである。出た目の和が３の倍数となる確率は、$\dfrac{12}{6^2}=\dfrac{1}{3}$

また、出た目の積が奇数となるのは、１回目と２回目でともに奇数の目が出たときであり、その確率は、$\dfrac{3\cdot 3}{6^2}=\dfrac{1}{4}$

よって、出た目の積が偶数となる確率は、$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

⑵　５以上の目が出る確率は、$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

５以上の目がちょうど３回出る確率は、${}_4C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{4-3}=\dfrac{8}{81}$

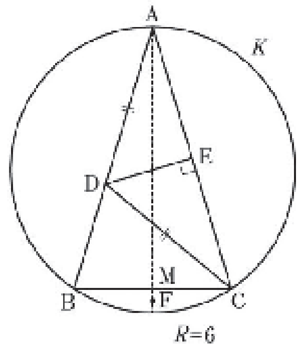
また、５以上の目が２回だけ連続して出るのは、５以上の目が出ることを A、４以下の目が出ることを B と表すと、$AABA$ と $ABAA$ の場合がある。それらの確率はどちらも、$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{81}$ であり、合わせて $\dfrac{4}{81}$

よって、求める条件付き確率は、$\dfrac{4}{81}\div\dfrac{8}{81}=\dfrac{1}{2}$

⑶　出た目の最大値が４である確率は、(４回とも４以下の目が出る確率) − (４回とも３以下の目が出る確率) で求められるから、

$\left(\dfrac{4}{6}\right)^4-\left(\dfrac{3}{6}\right)^4=\dfrac{175}{6^4}$

第２問



⑴　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\frac{3}{5}\mathrm{AB}}=\dfrac{5}{6}$　$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

⑵　円 K の半径を R、$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくと、

正弦定理より、$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\theta}=2R$　$\mathrm{BC}=2\cdot 6\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}=2\sqrt{11}$

また、$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とおくと、

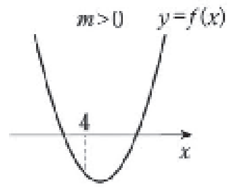
余弦定理より、$\mathrm{BC}^2=x^2+x^2-2x\cdot x\cos\theta$　$x>0$ より、$x=2\sqrt{33}$

⑶　$\mathrm{AM}=\sqrt{(2\sqrt{33})^2-(\sqrt{11})^2}=11$

$2R=\mathrm{AM}+2r$ であるから、$r=\dfrac{1}{2}$

$\triangle\mathrm{ADF}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\cdot\sqrt{11}\right)\cdot\mathrm{AF}=\dfrac{3}{10}\sqrt{11}\cdot\left(11+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{69\sqrt{11}}{20}$

第３問



⑴　$f(x)$ の判別式が正となるので、$(3m+2)^2-4m(3m+2)>0$

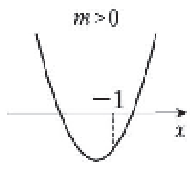
$-\dfrac{2}{3}<m<2$　$m\neq 0$ より、$-\dfrac{2}{3}<m<0$、$0<m<2$

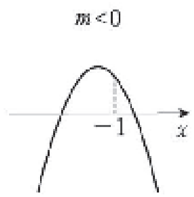
⑵　条件を満たすのは、$f(4)<0$ のときである。

$f(4)=7m-6<0$　$m<\dfrac{6}{7}$　よって、$0<m<\dfrac{6}{7}$

⑶　$m>0$ のとき、$f(-1)<0$　$m<0$ のとき、$f(-1)>0$

これらをまとめて、$m(7m+4)<0$　$-\dfrac{4}{7}<m<0$





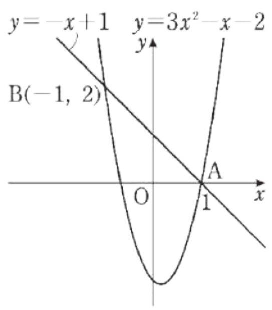
⑷　$m>0$ のとき、$3\leqq x\leqq 4$ における最大値 M は、$f(3)$ または $f(4)$ に等しい。

$f(3)-f(4)=(3m-4)-(7m-6)=2(1-2m)$

$0<m\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、$\mathrm{M}=f(3)=3m-4$　$\dfrac{1}{2}\leqq m$ のとき、$M=f(4)=7m-6$

数学②

第１問



⑴　②より、$f(t)=3t^2-t+a$

①に代入して、$\displaystyle\int_{-1}^{1}(3t^2-t+a)\,\mathrm{d}t=a$　$a=-2$

⑵　$f(x)=3x^2-x-2$ であるから、$\mathrm{A}(1,0)$、$\mathrm{B}(-1,2)$

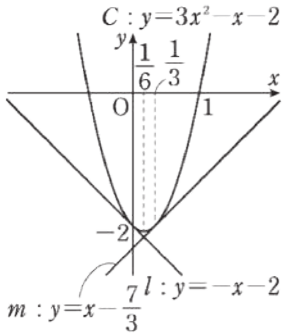
直線 AB の方程式は、$y=\dfrac{0-2}{1-(-1)}(x-1)$　$y=-x+1$

求める面積は、$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{(-x+1)-(3x^2-x-2)\}\,dx=4$

⑶　$f(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$ であるから、$0\leqq x\leqq 2$ の範囲では、

$|f(x)|=\begin{cases}-3x^2+x+2 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 3x^2-x-2 & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$

よって、$\displaystyle\int_0^2|f(x)|\,dx=\int_0^1(-3x^2+x+2)\,dx+\int_1^2(3x^2-x-2)\,dx=5$



(4) $f'(x)=6x-1$　$f(0)=-2$ であり、$(0,-2)$ における接線 l の傾きは $f'(0)=-1$

接線 l の方程式は、$y-(-2)=-(x-0)$　$y=-x-2$

これに垂直な直線の傾きは 1 であり、傾きが 1 となる点の x 座標は、$6x-1=1$ より $x=\dfrac{1}{3}$

接線 m の方程式は、$y-(-2)=1\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$　$y=x-\dfrac{7}{3}$

l、m の交点の x 座標は、$x-\dfrac{7}{3}=-x-2$ より、$x=\dfrac{1}{6}$

求める面積は、図形の対称性を利用して、$2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{6}}\{3x^2-x-2-(-x-2)\}\,dx=\dfrac{1}{108}$

第 2 問

(1)　$\{a_n\}$ の初項を a、公差を d とすると、$a_1+a_2=192$ より、$2a+d=192$　……①

$a_3+a_4=168$ より、$2a+5d=168$　……②

①､②より、$a=99$、$d=-6$

求める一般項は、$a_n=99+(n-1)(-6)=-6n+105$

$a_n>0$ より、$-6n+105>0$　$n<\dfrac{35}{2}$

初項から第 17 項までの和が最大となり、その和は、$\dfrac{17}{2}\{2\cdot 99+16\cdot(-6)\}=867$

(2)　$a_{12}=-6\cdot 12+105=33$　$\dfrac{a_1}{a_{12}}=\dfrac{99}{33}=3$

$b_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$　$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{b_k}=2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^{k-1}}=3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3)　$-\dfrac{a_n}{3}+39=-\dfrac{-6n+105}{3}+39=2n+4$

$n\geqq 2$ のとき、$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+4)=n^2+3n+2$

これに $n=1$ を代入すると、$c_1=6$ であるから、$n\geqq 1$ のとき、$c_n=n^2+3n+2$

よって、$c_8=90$

また、$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2+3k+2}=\dfrac{n}{2n+4}$

第 3 問

(1)　$PS=2\sin\theta$　$QR=PS=2\sin\theta$ であり、直角三角形 ORQ で $OR=\sqrt{3}\,QR=2\sqrt{3}\sin\theta$

$PQ=RS=OS-OR=2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta$

(2)　$T=PS\cdot PQ=4\sin\theta\cos\theta-4\sqrt{3}\sin^2\theta$

この式を変形して、$T=2\sin 2\theta-2\sqrt{3}(1-\cos 2\theta)=4\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}$

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ より、$\dfrac{\pi}{3}<2\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$ である。

T が最大になるのは、$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ のときで、$\theta=\dfrac{\pi}{12}$

$L=2(PS+PQ)=2(2\sin\theta+2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)=4\cos\dfrac{\pi}{12}-4(\sqrt{3}-1)\sin\dfrac{\pi}{12}$

ここで、$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　$\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

よって、$L=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$